Проектиране на КУСУМ-карти за показатели на качеството, разпределени по закона на Релей

ст.ас. Евелина Илиева Велева,
РУ"А.Кънчев",кат."Числени методи и статистика",
доц. д-р инж. Цвятко Станев Корийков,
РУ"А.Кънчев", кат. "Метрология и качество в машиностроенето"

РЕЗЮМЕ

Конструирани са две КУСУМ-карти за проверка съответно на настъпило отместване в разпределението на модулите на случайните точки и на изменение в параметъра σ^2, характеризиращ разсейването на случайните точки. Изведени са зависимости за определяне на оперативните характеристики и за оценка на средния брой необходими наблюдения до взимане на решение. При построяването на първата карта е предложен метод, приложим за разпределения,за които дефиниционната област зависи от разглеждания параметър.

Ключови думи: контрол на качеството, КУСУМ-карта, последователен анализ

1. Въведение

В практиката често се срещат показатели на качеството, които се разсейват под формата на окръжност около една централна точка, например, отклонение на попаденията върху мишена, позиционни отклонения, отклонение от съосност, радиално и челно биене и т.н. Ако правоъгълните координати X и Y на случайните точки са независими и еднакво нормално разпределени $N(0,\sigma^2)$, то модулите на векторите им имат разпределение на Релей с параметър σ^2. Често в практиката, обаче, горното предположение е нарушено и действителното разпределение на модулите r се характеризира с два параметъра - на отместването a и на формата σ^2. Плътността на това разпределение е

(1) $$f(r|a,\sigma^2)=\frac{(r-a)}{\sigma^2}.e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad r>a, a>0, \sigma>0.$$

С помощта на (1), при зададен допуск R, за $a=0$ се определят стойностите σ_0 и σ_1 на параметъра σ, съответстващи на допустимата дефектност AQL и недопустимата дефектност LQ:

(2) $$\sigma_0=\frac{R}{\sqrt{-2\ln AQL}}, \qquad \sigma_1=\frac{R}{\sqrt{-2\ln LQ}}.$$

За $\sigma=\sigma_0$ се определя стойността a_1 на параметъра a, при която ще се достигне LQ:

(3) $$a_1=R-\sigma_0\sqrt{-2\ln LQ}=\sigma_0(\sqrt{-2\ln AQL}-\sqrt{-2\ln LQ}).$$

Контролът на дефектността се свежда до проверка на двойките хипотези:

(4) $$H_0{:}a=0 \qquad \text{срещу} \qquad H_1{:}a=a_1,$$

при предположението, че $\sigma=\sigma_0$ и на

(5) $$H_0{:}\sigma=\sigma_0 \qquad \text{срещу} \qquad H_1{:}\sigma=\sigma_1,$$

при предположението, че $a=0$.

Предварително са зададени вероятностите α и β за грешки от I и II род на проверките.

2. Изложение

Въвеждат се означенията

$$A=\frac{1-\beta}{\alpha},\qquad B=\frac{\beta}{1-\alpha}. \tag{6}$$

2.1 Алгоритъм за последователна проверка на хипотезите (4).

За поредното m-то наблюдение r_m, се дефинира величината

$$y_m=\begin{cases}\mathrm{B/A} & ,ako \quad r_m<a_1+\varepsilon\\ \dfrac{f(r_m|a_1,\sigma_0^2)}{f(r_m|0,\sigma_0^2)} & ,ako \quad r_m\geq a_1+\varepsilon\end{cases}. \tag{7}$$

Величината ε ще бъде определена по-долу така, че предложената процедура действително да има вероятности за грешки от I и II род, равни на α и β.

Изчислява се произведението $y_1\cdot y_2\cdots y_m$. Ако получената стойност попадне в интервала (B,A), се извършва следващо наблюдение; ако се получи число по-малко от B, се према H_0 и ако получената стойност е по-голяма от A, се приема хипотезата H_1.

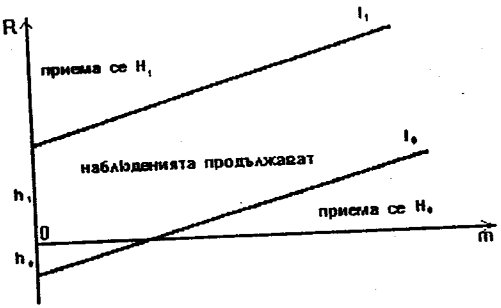
Не е трудно да се съобрази,че ако се получи наблюдение r_m, $r_m<a_1+\varepsilon$, то наблюденията ще приключат веднага с приемане на H_0. Следователно, ако до взимане на m-тото наблюдение включително, още не е взето решение, то всички r_i, $i=1,\dots,m$ са по-големи или равни на $a_1+\varepsilon$. Тогава

$$y_1\cdots y_m=\frac{f(r_1|a_1,\sigma_0^2)}{f(r_1|0,\sigma_0^2)}\cdots\frac{f(r_m|a_1,\sigma_0^2)}{f(r_m|0,\sigma_0^2)}=\left(1-\frac{a_1}{r_1}\right)\cdots\left(1-\frac{a_1}{r_m}\right).\exp\left\{\frac{a_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{m}r_i-\frac{m}{2\sigma_0^2}a_1^2\right\}.$$

Въвежда се означението

$$R=\sum_{i=1}^{m}\left\{\ln\left(1-\frac{a_1}{r_i}\right)+\frac{a_1}{\sigma_0^2}r_i\right\}. \tag{8}$$

Описаната процедура може да се представи с помощта на КУСУМ-картата, дадена на фиг.1.



Фиг. 1

Взима се m-тото наблюдение r_m. Ако то е по-малко от $a_1+\varepsilon$, се приема H_0 и наблюденията приключват. Ако $r_m\geq a_1+\varepsilon$, то се пресмята величината R и се нанася върху

КУСУМ-картата точката с координати (m, R). В зависимост от това, в коя област ще попадне тази точка, се взима и съответното решение (фиг.1).

Уравненията на правите l_0 и l_1, определящи съответните области на фиг.1 са:

$$l_0: \quad R = \frac{a_1^2}{2\sigma_0^2} m + h_0 \qquad , \qquad h_0 = \ln B,$$

$$l_1: \quad R = \frac{a_1^2}{2\sigma_0^2} m + h_1 \qquad , \qquad h_1 = \ln A.$$

Така дефинираният алгоритъм за проверка на хипотезите (4) дава възможност, при определянето на оперативната характеристика $L(a)$ и при оценяването на средния брой необходими наблюдения $E_a(n)$ до взимане на решение да се използуват стандартните формули на последователния анализ ([1]). За целта се въвежда величината

$$y = \begin{cases} B/A, & ako \quad x < a_1 + \varepsilon \\ \dfrac{f(x|a_1, \sigma_0^2)}{f(x|0, \sigma_0^2)}, & ako \quad x \geq a_1 + \varepsilon \end{cases} \tag{9}$$

Оперативната характеристика, която при всяка фиксирана стойност на a е равна на вероятността да се приеме H_0, има параметричното представяне

$$L(a) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h}, \tag{10}$$

където $h \neq 0$ и се определя от условието

$$1 = E_a(y^h) = \int_a^{\infty} y^h . f(x|a, \sigma_0^2) dx. \tag{11}$$

Условията $L(0) = 1 - \alpha$, $L(a_1) = \beta$ задават еквивалентни уравнения относно ε, които могат да се преобразуват във вида:

$$e^{-x^2/2} - (B/A).e^{-(x+\Delta)^2/2} + (B/A) - 1 = 0, \tag{12}$$

като $\Delta = a_1/\sigma_0$ и $x = \varepsilon/\sigma_0$. При зададени AQL и LQ от (3) се определя Δ и след това от (12) приближено се намира ε/σ_0.

За всяка фиксирана стойност на a, може приближено да се определи от (11) съответната стойност за h и след заместване в (10) да се пресметне $L(a)$. В частност

$$L(a_1/2) = \frac{h_1}{h_1 - h_0} \quad , \quad L(+\infty) = 0.$$

Ако условието (11) се запише във вида

$$1 = E_a(y^h / x > 0),$$

то без промяна може да се разглеждат и отрицателните стойности на a, например

$$L(-\infty) = 1.$$

Средният брой необходими наблюдения $E_a(n)$ до взимане на решение е число, заключено между изразите ([1]):

(13) $$\frac{L(a)(\ln B+\xi_a')+[1-L(a)]\ln A}{E_a(Z)} \quad \text{и} \quad \frac{L(a)\ln B+[1-L(a)](\ln A+\xi_a)}{E_a(Z)},$$

като: $\xi_a = \max_{r\geq 0} E_a(Z-r/Z\geq r)$; $\xi_a' = \min_{r\geq 0} E_a(Z+r/Z+r\leq 0)$; $Z=\ln y$,

величината y е дефинирана с (9). След несложни преобразувания се получава:

$$Z=\begin{cases}\ln(B/A), & ako \quad x<a_1+\varepsilon\\ \ln(1-a_1/x)+xa_1/\sigma_0^2-a_1^2/2\sigma_0^2, & ako \quad x\geq a_1+\varepsilon\end{cases}$$

Стойността, която ще получи Z при $x=a_1+\varepsilon$ се означава с C. С l е означена тази стойност на x, за която Z ще получи стойност 0, т.е. l е корена на уравнението $Z=0$. Ако се въведат означенията $\Delta=a_1/\sigma_0$, $\varepsilon'=\varepsilon/\sigma_0$, $a'=a/\sigma_0$, $l'=l/\sigma_0$, може да се запише

$$E_a(Z)=\ln\frac{B}{A}-\left(\ln\frac{B}{A}-C\right)e^{-(\Delta+\varepsilon'-a')^2}+\Delta\int_{\Delta+\varepsilon'-a'}^{\infty}e^{-u^2/2}\{1+[(u+a')(u+a'-\Delta)]^{-1}\}du,$$

$$\xi_a=e^{(l'-a')^2/2}.\Delta.\int_{l'-a'}^{\infty}e^{-u^2/2}\{1+[(u+a')(u+a'-\Delta)]^{-1}\}du, \qquad \xi_a'=\ln\frac{B}{A}-C.$$

2.2. Алгоритъм за последователна проверка на хипотези (5).

В този случай се прилага общата теория за последователна проверка ([1]).

За поредното m-то наблюдение r_m се пресмята отношението

(14) $$\frac{f(r_1|0,\sigma_1^2)\dots f(r_m|0,\sigma_1^2)}{f(r_1|0,\sigma_0^2)\dots f(r_m|0,\sigma_0^2)}=\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^{2m}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^{m}r_i^2\right\}.$$

Ако изчислената стойност попадне в интервала (B,A), се взима следващо наблюдение. Ако получената стойност е по-малка от B, се приема H_0, в противен случай, се приема H_1. Тази проверка се прави с друга КУСУМ-карта. За нейното описание е използвана отново фиг.1. По ординатната ос на картата се нанася величината

$$R=\sum_{i=1}^{m}r_i^2.$$

Правите l_0 и l_1, определящи съответните области на фиг.1, имат уравнения

$$l_0: \quad R=s.m+h_0, \qquad l_1: \quad R=s.m+h_1,$$

като $$s=\frac{4\ln(\sigma_1/\sigma_0)}{1/\sigma_0^2-1/\sigma_1^2}, \qquad h_0=\frac{2\ln B}{1/\sigma_0^2-1/\sigma_1^2}, \qquad h_1=\frac{2\ln A}{1/\sigma_0^2-1/\sigma_1^2}.$$

Величината, която се нанася по ординатата е положителна, затова решение за приемане на H_0 може да се вземе едва след $m\geq m_0$ наблюдения, където

$$m_0=\frac{\ln B}{2\ln(\sigma_0/\sigma_1)}.$$

Оперативната характеристика на тази проверка в параметричен вид е:

$$L(\sigma) \approx \frac{A^h - 1}{A^h - B^h}, \qquad \sigma^2 = \frac{1-(\sigma_0/\sigma_1)^{2h}}{h.(1/\sigma_0^2 - 1/\sigma_1^2)} \quad (15)$$

За нея $L(0) = 1$, $L(+\infty) = 0$, $L(\sigma_0) = 1-\alpha$, $L(\sigma_1) = \beta$, $L(\sqrt{s/2}) = \frac{h_1}{h_1 - h_0}$.

Оценката за средния брой необходими наблюдения до взимане на решение се получава след заместване в изразите (13) на величините

$$E_\sigma(Z) = \sigma^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) + 2\ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right),$$

$$\xi'_\sigma = \sigma^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) + 2\ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) / \left(1 - e^{-s/2\sigma^2}\right), \quad \xi_\sigma = \sigma^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right).$$

Проведените експериментални изследвания показаха, че за взимане на решение с първата КУСУМ-карта са необходими много по-малък брой наблюдения. Това се подтвърждава след заместване във формулите за оценка на средния брой необходими наблюдения до взимане на решение, приведени в доклада.

Пример . Нека AQL=0.05 (5 %) и LQ=0.15 (15 %), което съответства на Δ =0.499866 и σ_1/σ_0 =1.256620. При $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$, за средния брой необходими наблюдения до взимане на решение с I контролна карта се получават оценките:

$$2.6 < E_0(n) < 6.1, \quad 6.6 < E_{a_1}(n) < 9.1.$$

За II втора контролна карта тези оценки са:

$$21.9 < E_{\sigma_0}(n) < 25.2. \quad 19.2 < E_{\sigma_1}(n) < 23.7.$$

Предложените две КУСУМ-карти могат да се използват едновременно. С първата карта по-рано се взима решение и ако тя сигнализира за настъпило отместване, продължаването на проверката с втората карта е безпредметно. Процесът трябва да се спре и коригира. Не се приемат коригиращи действия върху процеса, само когато и при двете карти точките попадат в зоната на приемане на H_0.

3.Изводи

1.Изведени са зависимости за определяне на допустимите изменения на параметрите в закона на Релей a и σ^2, които са обвързани съответно с допустимата (AQL) и недопустимата (LQ) дефектности на контролирания показател на качеството.

2.Предложени са две КУСУМ-карти, които се използват едновременно за последователна проверка на допустимите изменения на параметрите в закона на Релей. Установено е, че са необходими по-малък брой наблюдения за взимане на решение с първата КУСУМ-карта, проверяваща изменението на параметъра a.

3.Предложена е модификация на теорията за последователна проверка на хипотези, приложима за разпределения,на които дефиниционната област зависи от разглеждания параметър.

4. Литература

1. Вальд, А. - Последовательны анализ, М.,"Физматгиз", 1960.
2. Мердюк, Дж. - Контрольные карты. М., "Финансы и статистика", 1986.
3. Точность производства в машиностроении и приборостроении, М., "Машиностроение", 1973.
4. Болотов, Е.П., Долженков, В.А. - Статистический контроль и регулирование качества массовой продукции, М., "Машиностроение", 1984.