МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 1997
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 1997
Proceedings of Twenty Sixth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Plovdiv, April 22–25, 1997

ОЦЕНЯВАНЕ НА ПАРАМЕТРИТЕ В РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА РЕЛЕЙ С ПОМОЩТА НА ПОРЯДКОВИ СТАТИСТИКИ

Евелина Илиева Велева

В практиката често се срещат показатели на качеството, които се описват с разпределението на Релей. За контрола на дефектността е от голямо значение да бъдат оценени неизвестните параметри на положението и формата. Използването на порядкови статистики е продиктувано от това, че не съществуват други достатъчни статистики за оценка на двата параметъра. Получените оценки са с минимални средноквадратични грешки измежду всички оценки, които са линейни комбинации от порядкови статистики. Намерени са числените характеристики на оценките и са представени в удобен за пресмятане вид. Приведени са крайните изчисления за извадки с обеми $n = 3, 5, 10$.

1. Въведение. При разглеждането на редица практически проблеми, като например позиционни отклонения на центровете на отвори, отклонение от съосност на две или повече цилиндрични повърхнини, радиално и челно биене на зъбни колела и т.н., законът на разпределение на контролирания показател на качеството се описва с голяма точност от т. нар. закон на Релей, с плътност ([1], [2]):

$$f(x) = \frac{(x-a)}{\sigma^2} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > a. \tag{1}$$

Удобно е, за означаване на това разпределение, да се използва символа $\mathrm{Re}(a, \sigma^2)$.

За контролирането на дефектността е необходимо, по извадка с обем n от наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, да бъдат оценени параметъра на положението a и параметъра на формата σ. За неизвестните параметри не съществуват други достатъчни статистики, освен порядковите статистики $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$. Затова е естествено да се разгледат оценки $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$ за a и σ, които са линейни функции на порядковите статистики на извадката, т.е. оценки от вида:

$$\hat{a} = k_1 x_{(1)} + k_2 x_{(2)} + \cdots + k_n x_{(n)}, \tag{2}$$

$$\hat{\sigma} = l_1 x_{(1)} + l_2 x_{(2)} + \cdots + l_n x_{(n)}. \tag{3}$$

2. Построяване на оценки за неизвестните параметри. Коефициентите k_i, l_i, $i = 1, \ldots, n$, определящи оценките (2) и (3) трябва да се подберат така, че ако на извадка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от наблюдения съответстват оценки $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$, то на извадка $x_1 + a_0, x_2 + a_0, \ldots, x_n + a_0$ да съответстват оценки $\hat{a} + a_0$ и $\hat{\sigma}$ (инвариантност при отместване). Изпълнението на това изискване се гарантира при:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1, \tag{4}$$

(5) $$l_1 + l_2 + \dots + l_n = 0.$$

Друго допълнително условие, което еднозначно ще определи коефициентите k_i, l_i, $i = 1, \dots, n$, е те да минимизират съответните средноквадратични грешки $\sqrt{E(\hat{a} - a)^2}$ и $\sqrt{E(\hat{\sigma} - \sigma)^2}$.

За по-лесното извършване на изчисленията е удобно случайната величина X, $X \in \mathrm{Re}(a, \sigma^2)$ да се представи във вида

$$X = \sigma Z + a,$$

където Z е случайна величина, $Z \in \mathrm{Re}(0, 1)$. Тогава порядковите статистики на извадката се изразяват

(6) $$x_{(i)} = \sigma z_{(i)} + a, \quad i = 1, \dots, n,$$

чрез порядковите статистики $z_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ на извадка от наблюдения над случайна величина Z, $Z \in \mathrm{Re}(0, 1)$. Като се използва представянето (6) за $x_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ в оценките (2) и (3) и се отчетат условията (4) и (5), може да се запише

(7) $$\hat{a} - a = \sigma(k_1 z_{(1)} + k_2 z_{(2)} + \dots + k_n z_{(n)}),$$

(8) $$\hat{\sigma} - \sigma = \sigma(l_1 z_{(1)} + l_2 z_{(2)} + \dots + l_n z_{(n)}).$$

Тогава

(9) $$E(\hat{a} - a)^2 = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} k_i^2 E(z_{(i)}^2) + 2 \sum_{i<j} k_i k_j E(z_{(i)} \cdot z_{(j)}) \right]$$

и

(10) $$E(\hat{\sigma} - \sigma)^2 = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} l_i^2 E(z_{(i)}^2) + 2 \sum_{i<j} l_i l_j E(z_{(i)} \cdot z_{(j)}) - 2 \sum_{i=1}^{n} l_i E(z_{(i)}) + 1 \right]$$

Въвеждат се означенията

(11) $$\begin{array}{ll} d_{ij} = E(z_{(i)} \cdot z_{(j)}), & c_i = E(z_{(i)}), \\ i = 1, \dots, n, & j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Съгласно казаното дотук, коефициентите k_i, $i = 1, \dots, n$ трябва да минимизират израза

$$S_a = E(\hat{a} - a)^2 / \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 d_{ii} + 2 \sum_{i<j} k_i k_j d_{ij},$$

при условие, че е изпълнено съотношението (4).

След построяване на функцията на Лагранж

$$S_a + 2\lambda(k_1 + k_2 + \dots + k_n - 1)$$

и приравняване към нула на частните и производни, за коефициентите k_i, $i = 1, \dots, n$ и параметъра λ се получава следната система линейни уравнения, записана в матричен вид:

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & 1 \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, коефициентите l_i, $i = 1, \ldots, n$ трябва да минимизират израза

$$S_\sigma = E(\hat{\sigma} - \sigma)^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 d_{ii} + 2\sum_{i<j} l_i l_j d_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n} l_i c_i + 1,$$

при условие, че е изпълнена зависимостта (5).

Съставя се функцията на Лагранж

$$S_\sigma + 2\mu(l_1 + l_2 + \cdots + l_n),$$

приравняват се към нула частните и производни и в резултат, за коефициентите l_i, $i = 1, \ldots, n$ и параметъра μ се получава системата

$$(13) \qquad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & 1 \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

След интегриране и преобразувания, които поради своята обемност не е уместно да бъдат приведени, за коефициентите d_{ij} и c_i, дефинирани с (11), се получават изразите:

$$c_i = \sqrt{(\pi/2)}nC_{n-1}^{i-1}\sum_{i-1}^{s}\sum_{s=0}^{i-1} C_{i-1}^{s}\frac{(-1)^{i-1-s}}{(n-s)^{3/2}},$$

$$d_{ii} = 2\sum_{s=0}^{i-1}\frac{1}{(n-s)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$d_{ij} = \sum_{s=0}^{i-1}\frac{1}{(n-s)} + nC_{n-1}^{j-1}\sum_{s=0}^{i-1} C_{j-1}^{s}\frac{(-1)^{j-1-s}}{(n-s)^2} +$$

$$n(j-i)C_{n-1}^{i-1}C_{n-i}^{n-j}\sum_{r=0}^{j-i-1}\sum_{s=0}^{i-1} C_{j-i-1}^{r}C_{i-1}^{s}\frac{(-1)^{j-r-s}}{[(n-i-r)(i-s+r)]^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(i-s+r)}{(n-i-r)}},$$

$$d_{ji} = d_{ij}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

За всяка конкретна стойност на n тези коефициенти могат да бъдат пресметнати и следователно системите уравнения, зададени с (12) и (13) могат да бъдат решени. Така, за всяка стойност на n се пресмятат коефициентите k_i и l_i, $i = 1, \ldots, n$ определящи оценките (2) и (3). В края на работата са приведени крайните резултати за извадки с обеми $n = 3, 5, 10$.

3. Числени характеристики на получените оценки. При решаването на системите (12) и (13), едновременно с коефициентите k_i и l_i, става определянето и на параметрите λ и μ. Не е трудно да се види, че са в сила равенствата

$$\mu = k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n, \tag{14}$$

$$-\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 d_{ii} + 2\sum_{i<j} k_ik_jd_{ij}. \tag{15}$$

Равенството (14), например, може да се докаже като се използват формулите на Крамер за решаване на системи линейни уравнения. Равенството (15) може да бъде доказано по следния начин. Умножават се първите n реда на системата, зададена с (12), съответно на k_1, k_2, ..., k_n и се събират. Резултатът е

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 d_{ii} + 2\sum_{i<j} k_ik_jd_{ij} + \lambda(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = 0.$$

Като се вземе предвид последното уравнение, т. е. условието (4), точно се получава съотношението (15).

Ако се извърши същото и по отношение на системата (13), т. е. умножаване на първите n уравнения съответно на $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и събиране, ще се получи зависимост

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 d_{ii} + 2\sum_{i<j} l_il_Jd_{ij} + \mu(l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = \sum_{i=1}^{n} l_1c_i.$$

Като се вземе пред вид последният ред на системата, т. е. условието (5), се получава съотношението

$$\sum_{i=1}^{n} l_ic_i = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 d_{ii} + 2\sum_{i<j} l_il_jd_{ij}. \tag{16}$$

За удобство, по-нататък ще се използва означението

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_1c_i.$$

При пресмятането на $\operatorname{cov}(\hat{a}, \hat{\sigma})$ се получава сума

$$S = \sum_{i=1}^{n} k_il_id_{ii} + \sum_{i<j}(l_ik_j + l_jk_i)d_{ij}.$$

Ако се умножат първите n реда на системата (13) съответно на k_1, k_2, ..., k_n и се съберат, резултатът е

$$S + \mu(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = k_1c_1 + k_2c_2 + \cdots + k_nc_n.$$

Като се вземат предвид (4) и (14), се достига до

$$\sum_{i=1}^{n} k_il_id_{ii} + \sum_{i<j}(l_ik_j + l_jk_i)d_{ij} = 0. \tag{17}$$

С помощта на равенствата (14), (15), (16) и (17), не е трудно да се види, че числените характеристики на получените оценки $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$ се изразяват по следния начин

$$E(\hat{a}) = a + \sigma\mu; \qquad E(\hat{a} - a)^2 = -\lambda\sigma^2;$$
$$E(\hat{a}) = L\sigma; \qquad E(\hat{\sigma} - \sigma)^2 = (1 - L)\sigma^2.$$

Ковариационната матрица на $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}$ е

$$K = \begin{pmatrix} D(\hat{a}) & \operatorname{cov}(\hat{a},\hat{\sigma}) \\ \operatorname{cov}(\hat{a},\hat{\sigma}) & D(\hat{\sigma}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-\mu^2 & -\mu L \\ -\mu L & (1-L)L \end{pmatrix}.$$

По-долу са приведени крайните резултати от изчисленията при $n = 3, 5, 10$.

n = 3

$$\hat{a} = 1.4657x_{(1)} - 0.0052x_{(2)} + 0.4604x_{(3)},$$

$$\hat{\sigma} = -0.8219x_{(1)} + 0.1996x_{(2)} + 0.6223x_{(3)},$$

$$E(\hat{a}) = a + 0.214\sigma; \quad E(\hat{a}-a)^2 = 0.3332\sigma^2;$$
$$E(\hat{\sigma}) = 0.7827\sigma; \quad E(\hat{\sigma}-\sigma)^2 = 0.2173\sigma^2;$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.2874 & -0.1675 \\ -0.1675 & 0.1701 \end{pmatrix}\sigma^2.$$

n = 5

$$\hat{a} = 1.2171x_{(1)} - 0.1465x_{(2)} + 0.0115x_{(3)} - 0.0985x_{(4)} - 0.2765x_{(5)},$$

$$\hat{\sigma} = -0.7218x_{(1)} + 0.0056x_{(2)} + 0.1114x_{(3)} + 0.2154x_{(4)} + 0.4006x_{(5)},$$

$$E(\hat{a}) = a + 0.1023\sigma; \quad E(\hat{a}-a)^2 = 0.1598\sigma^2;$$
$$E(\hat{\sigma}) = 0.8857\sigma; \quad E(\hat{\sigma}-\sigma)^2 = 0.1143\sigma^2;$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.1493 & -0.0906 \\ -0.0906 & 0.1012 \end{pmatrix}\sigma^2.$$

n = 10

$$\hat{a} = 0.9613x_{(1)} + 0.1585x_{(2)} + 0.092x_{(3)} + 0.0539x_{(4)} + 0.0184x_{(5)} -$$
$$0.0008x_{(6)} - 0.0243x_{(7)} - 0.0766x_{(9)} - 0.1337x_{(10)},$$

$$\hat{\sigma} = -0.5904x_{(1)} - 0.071x_{(2)} + 0.0171x_{(3)} + 0.0122x_{(4)} + 0.0446x_{(5)} +$$
$$0.0627x_{(6)} + 0.0878x_{(7)} + 0.1129x_{(8)} + 0.1455x_{(9)} + 0.2128x_{(10)},$$

$$E(\hat{a}) = a + 0.0398\sigma; \quad E(\hat{a}-a)^2 = 0.0627\sigma^2;$$
$$E(\hat{\sigma}) = 0.9499\sigma; \quad E(\hat{\sigma}-\sigma)^2 = 0.0501\sigma^2;$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.0611 & -0.0378 \\ -0.0378 & 0.0476 \end{pmatrix}\sigma^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Методически указания 3-90. Статистически контрол на зъбни колела, София, Издателство „Стандартизация“, 1990 г.

[2] Е. Велева, Цв. Корийков, Проектиране на КУСУМ-карти за показатели на качеството, разпределени по закона на Релей, VII-ми Национален научен симпозиум с международно участие „Метрология и надеждност'96", том 2, (1996 г), стр. 120-124

Евелина Илиева Велева
Русенски Университет „Ангел Кънчев"
ул. „Студентска" 8
7017 Русе

ESTIMATION OF RAILEIGH DISTRIBUTION PARAMETERS WITH THE HELP OF ORDER STATISTICS

Evelina Ilieva Veleva

Quality criteria given by the Raileigh distrubution are often met in practice. For the acceptance sampling it is important to estimate the parameters of this distribution. The use of order statistics comes from the fact of there are no other sufficient statistics for the estimation of these parameters. The obtained estimates are the solution of a least squares problem. Some of the moments are derived in a convinient form. Examples with sample sizes $n = 3, 5, 10$ are presented.