Ученически институт по математика и информатика

Девета ученическа секция УС'09, Боровец, 1-4.04.2009

Геометрична алгебра от Питагор до PSTricks

Използване на LaTeX-пакети pst-eucl, pdfscreen и animate при обучението по математика

Михаил Георгиев & Теодор Манолов - 12 клас

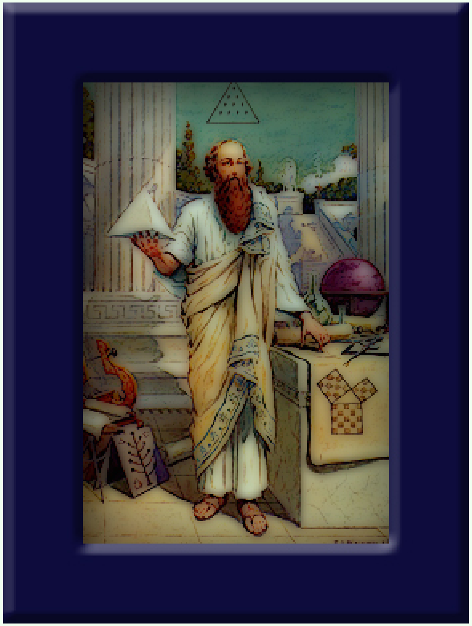
Математическа Гимназия «Баба Тонка» - Русе

Научен ръководител: Стефка Караколева

Русенски Университет „Ангел Кънчев"

1. По стъпките на Питагор

- Геометрията и алгебрата са спътници на човека от древността до наши дни;
- Много сложни алгебрични задачи се доказват елегантно със средствата на геометрията;
- Графичното решаване на задачи във всички области доказва нуждата от математически знания и аргументира обучението, свързвайки науката с практиката;



- «Баща» на геометричната алгебра е Питагор. Той се счита за основател на геометричния метод в алгебрата;
- Графичното пресмятане достига своя апогей през Деветнадесети век и намира достойно приложение в практиката.

2. Геометричното онагледяване и комуникациите в Интернет

- ✍ Съвременното Интернет-поколение има нужда от нагледно и интересно обучение, в което да има цвят, движение и елементи на игра;
- ✍ За постигане на това при обучението по математика, е необходима система за създаване на електронни документи, с богати графични възможности;
- ✍ Предлагаме на вашето внимание няколко интересни примера на геометрични приложения в алгебрата, изработени с компютърната система LaTeX и нейните графични разширения от фамилията **PSTricks**;

- Пакетът pst-eucl е предназначен за изобразяване на геометрични обекти в $\mathcal{R}^2$;
- Той предлага удобни макроси за чертане «с линийка и пергел»;
- Потребителят въвежда координати на точки, след което с команди се построяват права, окръжност, ъгъл, триъгълник, ъглополовящи, симетрали, центрове на вписана и описана окръжност и др.
- Удобно и лесно се построяват образи на точки при геометрични преобразувания, сечения на права, окръжност и функция.
- Системата LaTeX и всички свързани с нея пакети са ***отворен код***;
- Пълен архив с подробна документация за многобройните приложения на LaTeX: **www.ctan.org**
- Документация, пакети и FAQ за графичните пакети от фамилията **PSTricks: http://tug.org/PSTricks/main.cgi/**

3. Геометрични операции с числа

3.1. Сбор на две числа

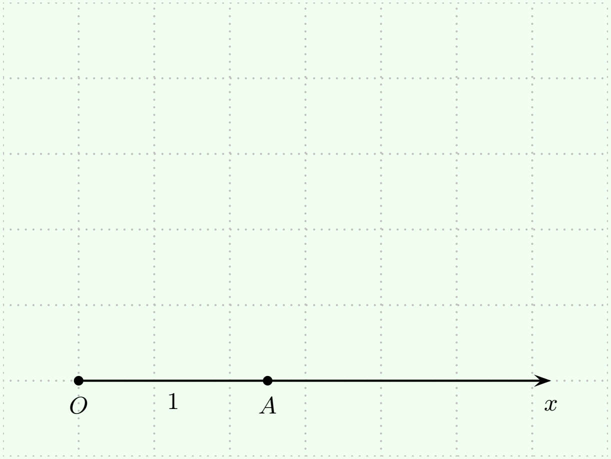
- Дадени са две числа a и b, на които трябва да се намери сумата $a + b$.
- Върху лъча Ox се построяват отсечките $OA = a$, $AB = b$.
- Отсечката $OB = a + b$ е техният сбор.

3.2. Разлика на две числа

- Дадени са две числа a и b, $(a > b)$, на които трябва да се намери разликата $a - b$.
- Върху лъча Ox се построяват отсечките $OA = a$, $OB = b$.
- Отсечката $AB = a - b$ е тяхната разлика.

3.3. Умножение на две и три числа

Дадени са три числа l_1, l_2, l_3. Търси се произведението им.



Върху оста Ox се нанася отсечка OA, равна на произволно избрана единица мярка за дължина. В точката A се издига перпендикуляр към Ox и се нанасят по него отсечките:

$$AA_1 = l_1 \ , \ AA_2 = l_2 \ , \ AA_3 = l_3.$$

Нанася се $OB = AA_1$ и се издига в точката B перпендикуляр, който пресича OA_2 в точка B_1. Нанася се $OC{=}BB_1$, издига се перпендикуляр: той пресича OA_3 в точка C_1.
Отсечките BB_1 и CC_1 са съответно произведенията $l_1 l_2$ и $l_1 l_2 l_3$, което се доказва въз основа на подобието на $\triangle OAA_2 \cong \triangle OBB_1$, както и на $\triangle OAA_3 \cong \triangle OCC_1$.
И наистина

$$\frac{BB_1}{AA_2} = \frac{OB}{OA} \quad \text{, откъдето} \quad BB_1 = \frac{OB \cdot AA_2}{OA},$$

но $OA = 1, OB = OA_1 = l_1; AA_2 = l_2$, следователно $BB_1 = l_1 l_2$.
По същия начин

$$CC_1 = BB_1 \cdot l_3 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3.$$

3.4. Умножение с рационално число

Дадено е реално число a и рационално число p. Търси се pa. Например, нека $p = \frac{1}{3}$.

Върху оста Ox се нанася отсечка $OA = a$. Върху лъч Os се построяват отсечки $OP = \frac{1}{3}$, $PP_1 = OP$, $P_1P_2 = OP$. Построява се образът PB на отсечката P_2A при хомотетия с център точка O и коефициент $1/3$. Отсечката $OB = pa = \frac{1}{3}a$.

3.5. Деление

Дадени са две реални числа числа a и b. Търсим частното $\frac{a}{b}$.

Нанасят се $OA = 1$, $OB = b$ и $BC = a$. Тогава отсечката AM ще ни даде търсеното частно. И наистина

$$\frac{AM}{OA} = \frac{BC}{OB},$$

а оттам

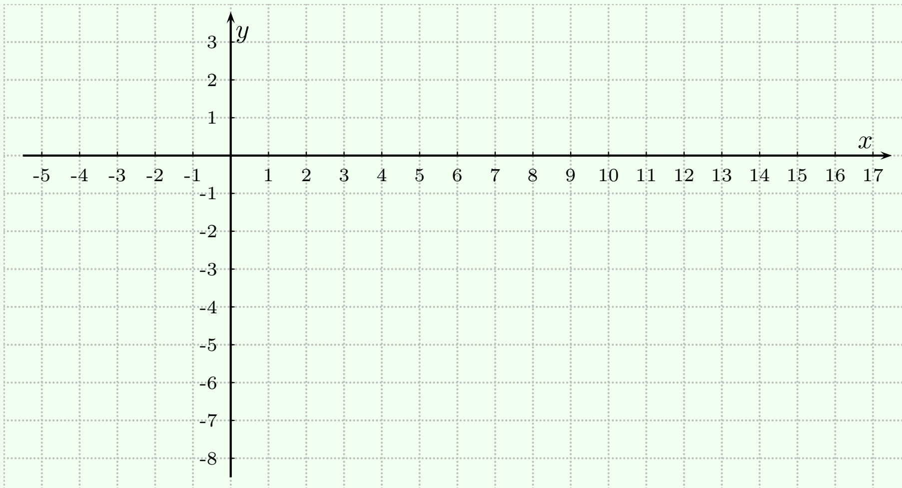
$$AM = \frac{BC \cdot OA}{OB},$$

а понеже $BC = a$, $OA = 1$, $OB = B$, следва че

$$AM = \frac{a}{b}.$$

3.6. Степенуване

Числото, което трябва да се повдигне на степен, се изобразява във вид на отсечка a.



Начертават се две взаимно перпендикулярни оси Ox и Oy. На оста Ox се нанася $OA_0 = 1$, а на оста Oy се нанася $OA_1 = a$; свързва се A_0 с A_1 с права линия и към тази линия в точка A_1 се издига перпендикуляр, който пресича Ox наляво от O в точка A_2; от тази точка отново се издига перпендикуляр към A_1A_2 и т.н. Получава се $OA_2 = a^2$; $OA_3 = a^3$ и т.н.
Действително, от свойството на височината в правоъгълен триъгълник:

$$OA_0 \cdot OA_2 = (OA_1)^2, \text{ т.е. } OA_2 = a^2$$

$$OA_1 \cdot OA_3 = (OA_2)^2, \text{ т.е. } a\,OA_3 = a^4$$

а оттам

$$OA_3 = \frac{a^4}{a} = a^3$$

$$OA_2 \cdot OA_4 = (OA_3)^2, \text{ т.е. } a^2\,OA_4 = a^6$$

откъдето

$$OA_4 = \frac{a^6}{a^2} = a^4$$

3.7. Коренуване

Първи начин Достатъчно е да се намери средно-геометрична AM на отсечката $OA = 1$ и отсечката AB, равна на числото N, от което трябва да се извлече квадратен корен.

И действително

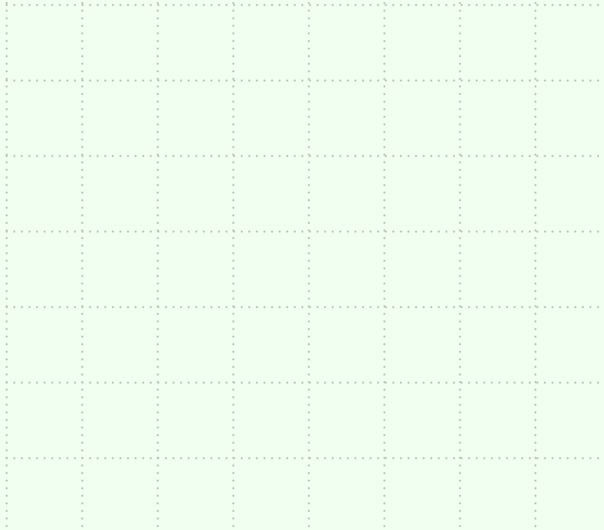
$$AM = \sqrt{OA \cdot AB} \quad \text{или} \quad AM = \sqrt{N}$$

Ако N е твърде голямо число и нанасянето му изцяло е графически неизпълнимо, може да се приложи

Втори начин

- ✔ Този начин се основава на Теоремата на Ферма, която гласи, че всяко цяло число е или пълен квадрат, или е сбор от два, три или четири квадрата.
- ✔ Това означава, че всяко число може да се разложи на пълни квадрати, а после да се извлекат от тях корени, като се приложи теоремата на Питагор за правоъгълните триъгълници.
- ✔ Например, да пресметнем корен квадратен от числото 42.
- ✔ Представяме числото 42 като сума от квадрати:

$$42 = 1^2 + 4^2 + 5^2.$$

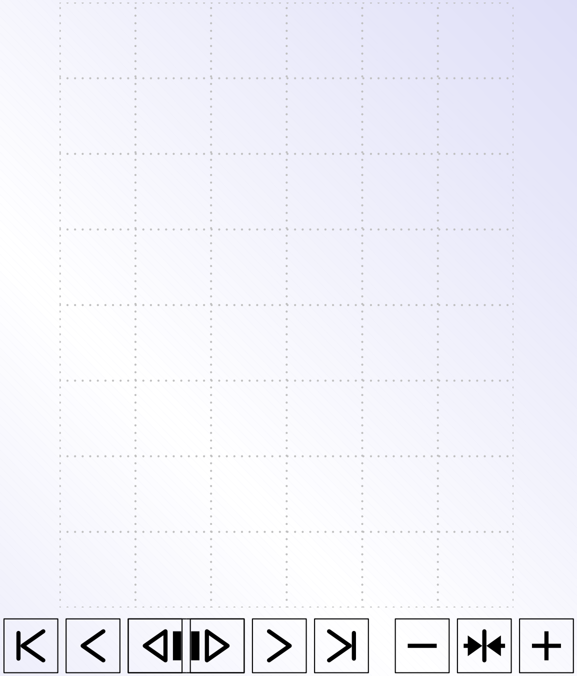


- ☞ Построяваме правоъгълен триъгълник с катети равни на 1 и 4.
- ☞ Хипотенузата му е равна на $\sqrt{17}$.
- ☞ Нека да построим нов правоъгълен триъгълник, единият катет на който е $\sqrt{17}$, а вторият катет е 5.
- ☞ Хипотенузата на този втори триъгълник е равна на търсения от нас квадратен корен от 42.

- Ако даденото число може да се разложи на пълни квадрати по няколко начина, трябва да се подбере най-изгодната комбинация.
- Например:

$$28 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2,$$
$$28 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2,$$
$$28 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2,$$
$$28 = 8^2 - 6^2.$$

- Най-изгодна е последната комбинация. Достатъчно е да се построи правоъгълен триъгълник, хипотенузата на който е равна на 8, а единият от катетите е 6.
- Тогава другият катет ще бъде $\sqrt{28}$.



- При другите комбинации можем да си послужим с построяване на правоъгълни триъгълници, първият от които има катети равни на 1. Хипотенузата на този триъгълник е $\sqrt{2}$.
- Като построяваме по този начин триъгълници, както е показано на Фигурата, ще получим последователно хипотенузи, равни на $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т.н.

4. Геометрични прогресии

4.1. Намиране членовете на намаляваща геометрична прогресия

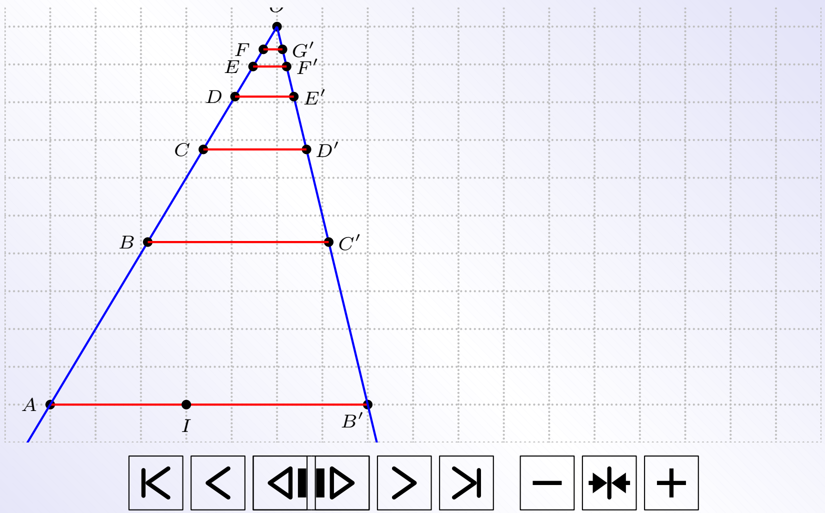
По зададени първи и втори член на намаляваща геометрична прогресия, да се намерят следващите членове.

- ☆ Начертава се отсечка AB', равна на първия от двата члена на прогресията.
- ☆ През точките A и B' прекарваме две произволни прави OY и OZ, които се пресичат в точка O.
- ☆ Върху AB' нанасяме отсечка IB', равна на втория член от прогресията.
- ☆ През точка I прекарваме правата IB, успоредна на OZ.
- ☆ През пресечната точка B на тази права с правата OY се начертава правата BC', успоредна на AB'; после през точка C' - успоредна на $B'B$ и т.н.
- ☆ Тогава

$$\frac{BC'}{AB'} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC'}{OB'} = \frac{OC}{OB} = \frac{CD'}{BC'} = \dots$$

Това означава, че членовете на тази прогресия ще са равни на отсечките AB', BC', CD', DE' и т.н.

4.2. Сума на намаляваща геометрична прогресия като сбор от отсечки



Въз основа на изложения в Раздел 4 метод, може да се намери сборът на произволен брой членове на намаляваща геометрична прогресия.

- ★ Достатъчно е да се продължат линиите CC', DD', $EE' \ldots$ до пресичането им с продължението на линията AB' в точките C'', D'', E'' и т.н.
- ★ Ясно е, че AC'', AD'', AE'' представляват сбор на два, три, четири поредни члена на прогресията.
- ★ Ако през точка O се построи права OO', успоредна на правата BB' до пресичането ѝ с продължението на отсечката AB' в точка O'', се получава отсечката AO'', която е сбор от членовете на безкрайно намаляващата геометрична прогресия:

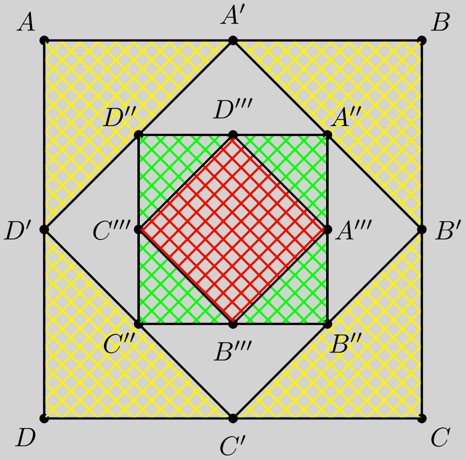
$$AO'' = AB' + BC' + CD' + DE' + \ldots$$

- На Фигурата отсечките $AB', BC', CD', DE' \ldots$ са членове на безкрайно намаляваща геометрична прогресия с частно $OC' : OB'$, а сборът ѝ е отсечката AO''.
- Но освен това имаме

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{OC'}{OB'} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD'}{OC'} = \frac{DD'}{CC'} = \ldots$$

- Това означава, че отсечките $BB', CC', DD', EE' \ldots$ са също членове на безкрайно намаляваща геометрична прогресия със същото частно $OC' : OB'$, както в първата прогресия, но с друг начален член.
- Не е трудно да се установи, че сборът на членовете на тази прогресия е равен на отсечката OO''.

4.3. Сума на намаляваща геометрична прогресия като сбор от лица



Интересни са резултатите от графичното представяне на сбор на някои прогресии чрез сума от лица на геометрични фигури. Тези графични изображения по очевиден начин онагледяват резултатите, получени по алгебричен път.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

Графично тази прогресия, чиято сума е единица, можем да представим така:

- Построяваме квадрат със страна 1 и лице - също 1.
- В този квадрат се вписва втори квадрат, като се свързват средите на страните на първия, неговото лице е 1/2.
- По аналогичен начин се получава трети квадрат със страна 1/4 и лице 1/4 и т.н.
- Като се сумират лицата на получените вписани квадрати, се получава лицето на дадения квадрат.

5. Специални обекти в равнината

- Даден е триъгълник $\triangle ABC$.
- Да се построят:
  - външни и вътрешни ъглополовящи;
  - външно и вътрешно вписаните окръжности;
  - окръжността през центровете на външно вписаните окръжности;
  - описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

На Фигурите са изобразени два триъгълника - остроъгълен и тъпоъгълен, за които са изобразени посочените геометрични обекти. Разликата в сорс-файловете, дадени в Приложение, е единствено в координатите на върховете на триъгълниците.