Решаване на Транспортна задача с MATLAB

Автор: Иван Георгиев
Научен ръководител: гл.ас. Стефка Караколева

Solving of Transportation problem with MATLAB: *The paper presents an algorithm for solving Transportation Problem via Computational system MATLAB. Transportation problem is a special case of the Linear Programming Problem. Unfortunately there is no command in MATLAB for solving Transportation Problem. In this paper we solve the Transportation Problem as a Linear Programming Problem by using Computational System MATLAB.*

Key words: *Matlab, Operations Research, Linear Programming, Transportation Problem.*

ВЪВЕДЕНИЕ

Транспортната задача е специален тип задача на линейното оптимиране. Тя се отнася до разпределяне на количества между група даващи обекти (източници) и група приемащи обекти (местоназначения) по такъв начин, че да се минимизира тоталната цена на това разпределяне.

Решаването на транспортната задача се основава на модифициран Симплекс-метод за решаване на Задача на линейното оптимиране [1,2], наречен транспортен симплекс-метод.

В системата MATLAB [3,4] са достъпни команди за решаване на класическата задача на линейното оптимиране с ограничения: linprog, bintprog, но в частния случай за транспортна задача, такава команда няма.

Тук се разглежда един метод за решаване на Транспортна задача чрез свеждането и до задача на линейното оптимиране.

ФОРМУЛИРОВКА НА ТРАНСПОРТНАТА ЗАДАЧА

Нека са дадени m на брой източници A_i, които предлагат количества a_i $i = 1 \ldots m,$ а местоназначенията B_j са n на брой, които търсят количества b_j, $j = 1 \ldots n.$ Нека е дадена матрица C на транспортните разходи за една разпределителна единица от i–тия източник до j–тото местоназначение:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Нека x_{ij} са неизвестните единици за разпределяне от от i–тия източник до j–тото местоназначение, $i = 1 \ldots m,\ j = 1 \ldots n.$

Целта е да се минимизира общата цена на разпределянето на тези количества.

Транспортна задача:

Да се минимизира функцията на общите транспортни разходи

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

при ограничения

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1 \ldots m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1 \ldots n. \end{aligned} \qquad (2)$$

и ограничения за неотрицателност на неизвестните променливи

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (3)$$

Матрицата X на неизвестните

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича *матрица на превозите*.

Матрица на превозите, удовлетворяваща системата ограничения (2)-(3), се нарича *допустимо решение* на транспортната задача.

За удобство, цените, наличностите и потребностите в *транспортната задача* се записват в *транспортна таблица*:

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

СПЕЦИФИЧНИ ОСОБЕНОСТИ НА ТРАНСПОРТНАТА ЗАДАЧА

Ако неизвестните променливи се разглеждат като вектор-стълб, получен от редовете на матрицата X, то Транспортната задача се записва като Задача на линейното оптимиране:

$$\min Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots c_{mn}x_{mn}$$

при ограничения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

и ограничения за неотрицателност $x_{ij} \geq 0$.

Транспортната задача има следните специфични особености:

- Задачата е за минимизиране на целевата функция;
- Всички ограничения са от тип „равенство”;
- Елементите на матрицата от коефициентите пред неизвестните в ограниченията са нули или единици;
- Във всеки стълб на матрицата от коефициентите пред неизвестните в ограниченията има по две единици, т.е всяка променлива участва само в две уравнения с коефициент единица.

Теорема 1: Транспортната задача (1)–(3) има допустимо решение тогава и само тогава, когато е изпълнено уловието

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4}$$

Теорема 2: Рангът на системата уравнения (2) е равен на $m+n-1.$

Следствие: Всяко допустимо решение X на транспортната задача съдържа най-много $m+n-1$ положителни компоненти $x_{ij}.$ Останалите компоненти са равни на нула.

Определение 1: Допустимо решение на транспортната задача, в което има точно $m+n-1$ положителни компоненти $x_{ij},$ се нарича **неизродено.**

Определение 2: Допустимо решение на транспортната задача, в което има по-малко от $m+n-1$ положителни компоненти $x_{ij},$ се нарича **изродено.**

ВИДОВЕ ТРАНСПОРТНИ ЗАДАЧИ

- *Балансирани и небалансирани транспортни задачи*

Според това дали е изпълнено условието на Теорема 1, транспортните задачи са два вида: балансирани и небалансирани. В случай, че е изпълнено условието (4), Транспортната задача се нарича балансирана, а в обратния случай

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ ,$$

задачата е небалансирана. При това са възможни два случая:

1. Предлагането е по-голямо от търсенето. В този случай се въвежда фиктивно местоназначение (потребител), с нули за транспортни разходи и искано количество - разликата между общите наличности и потребности:
$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \ ;$$
2. Търсенето е по-голямо от предлагането. В този случай се въвежда фиктивен източник (производител), с транспортни разходи нула и произведено количество - разликата между общите потребности и наличности:
$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

- *Задача с блокирани превози (със забрани)*

Когато между някой източник и местоназначение няма транспотрна връзка, транспортната задача е с «блокрани превози». В този случай за транспортен разход се приема много голямо положително число $M >> 0$ (метод на големите М).

Друг случай, в който се налага използването на М-метода, е когато Транспортната задача е небалансирана и е наложено изискване потребителят B_k да получи исканото количество изцяло. В този случай, след въвеждане на фиктивен източник A_s, за транспортен разход c_{sk} се полага $M(M >> 0)$, като се осигурява B_k да получи необходимите количества само от реални източници.

Аналогична ситуация се получава когато задачата е небалансирана и освен това някой производител иска да разпредели цялото си налично количество. Тогава, след въвеждане на фиктивен потребител (местоназначение) B_k, за транспортен разход c_{sk} се полага $M(M >> 0)$, като с това се осигурява A_s да разпредели наличните си количества само до реални потребители (местоназначения).

ПРОГРАМНА РЕАЛИЗАЦИЯ

Програмата за решаване на Транспортна задача е MATLAB-функция със следните аргументи:

Входни аргументи:

- Матрица C на транспортните разходи;
- Вектор a - предлагани количества;
- Вектор b - търсени количества;

Изходни аргументи:

- Z – стойност на целевата функция;
- X – матрица на решението на Транспортната задача.

След като се въведат стойностите на входните аргументи, се задава командата

[Z,X]=transport(C,a,b)

В случай на небалансирана транспортна задача, програмата автоматично я балансира.

При решаване на задача с блокирани превози, съответният елемент в матрицата C на транспортните разходи се задава достатъчно голямо число, от порядъка на 1e+009.

```
function [Z,X]=transport(C,a,b)
[m,n]=size(C);
[ma,na]=size(a);
[mb,nb]=size(b);
if ma<na
    a=a';
    [ma,na]=size(a);
end
if mb<nb
    b=b';
    [mb,nb]=size(b);
end
if (ma~=m)|(mb~=n)
    error('некоректен брой елемемти на а или b')
end
suma=sum(a);
sumb=sum(b);
Iflag=0;
if sumb>suma
```

```
    Iflag=1;
    nulb=zeros(1,length(b));
    C=[C;nulb];
    a=[a;sumb-suma];
end
if sumb<suma
    Iflag=2;
    nula=zeros(length(a),1);
    C=[C,nula];
    b=[b;suma-sumb];
end
B=[a;b];
[m,n]=size(C);
f=reshape(C',m*n,1);
A1=zeros(m,m*n);
A2=eye(n);
A3=eye(n);
for k=1:m
    A1(k,((k-1)*n+1):(k*n))=1;
end
for k=1:(m-1)
    A2=[A2,A3];
end
A=[A1;A2];
lb=zeros(m*n,1);
options = optimset('LargeScale', 'off', 'Simplex', 'on');
[X,Z]=linprog(f,[],[],A,B,lb,[],[],options);
X=reshape(X,n,m);X=X';
if Iflag==1
    X(end,:)=[];
elseif Iflag==2
    X(:,end)=[];
end
```

ЧИСЛЕНИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Програмата за решаване на транспортна задача е тествана многократно с различни числови данни. Следват три примера на балансирана, небалансирана задачи и Транспортна задача с блокирани превози.

No.1	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	4	2	30
A_2	5	3	1	20
A_3	3	6	4	40
b_j	45	35	10	

No.2	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	2	4	80
A_2	4	2	6	70
A_3	6	1	3	50
b_j	50	80	50	

No.3	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	20	45	40	60
A_2	–	30	25	60
A_3	–	15	20	30
b_j	20	10	30	

```
>>%Пример 1: балансирана транспортна задача
>> C=[4 4 2;5 3 1;3 6 4];
>>a=[30 20 40];
>> b=[45 35 10];
>> [Z,X]=transport(C,a,b)
Z =
   280

X =
     5    25     0
```

```
     0     10     10
    40      0      0
```

```
>>%Пример 2: небалансирана транспортна задача
>> C=[1 2 4;4 2 6;6 1 3];
>> a=[80 70 50];
>> b=[50 80 50];
>> [Z,X]=transport(C,a,b)
Z =
   360
X =
    50     10      0
     0     70      0
     0      0     50
```

```
>>%Пример 3: небалансирана транспортна задача с блокирани превози
>> C=[20 45 40;1e9 30 25;1e9 15 20];
>>a=[60 60 30];
>> b=[20 10 30];
>> [Z,X]=transport(C,a,b)
Z =
        1200
X =
    20      0      0
     0      0     10
     0     10     20
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Програмата за решаване на Транспортна задача намира широко приложение в науката и практиката и успешно се прилага при изучаване на Оптимизационни методи от студентите в Русенски Университет. Тя може да се използва и от докторанти, научни работници, студенти и специализанти.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Караколева, Ст. *Изследване на операциите*, Част 1, РУ „Ангел Кънчев", 2002.
[2] Павлов, В. *Математически методи в икономиката*, РУ „Ангел Кънчев", 2006.
[3] Тончев, Й., *Matlab 7, Част 3*, Техника, 2009.
[4] Документация *Matlab Optimization Toolbox*: www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/optim/
[5] Образовательны математический сайт http://matlab.exponenta.ru/optimiz/index.php

За контакти:

Докторант Иван Радославов Георгиев, Катедра "Числени методи и статистика", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел. 082/ 888 720, e-mail: irgeorgiev@ru.acad.bg

Гл.ас. Стефка Караколева, Катедра "Числени методи и статистика", Русенски университет "Ангел Кънчев", Тел. 082/ 888 466, e-mail: skarakoleva@ru.acad.bg