Русенски Университет «Ангел Кънчев»

Решени теми от кандидатстудентските изпити по МАТЕМАТИКА за Русенски Университет «Ангел Кънчев»

2000 – 2011

Стефка Караколева - **съставител, редактор**

Съюз на Математиците в България – секция Русе

2011

УДК 51 (079)

Решени теми от кандидатстудентските изпити
по МАТЕМАТИКА
за Русенски Университет «Ангел Кънчев»
2000 – 2011
Стефка Караколева – съставител и редактор
Русенски Университет «Ангел Кънчев», 2011.

В книгата са включени тридесет и четири решени теми, давани през последните дванадесет години на изпитите по математика в Русенски Университет «Ангел Кънчев», както и единадесет теми за самоподготовка. Темите включват материал, изучаван в българските училища и могат да се използват при кандидатстване с изпит по математика във всички български университети.

Книгата е предназначена за ученици и кандидат-студенти, които се подготвят за зрелостни и кандидатстудентски изпити по математика, но може да се използва и като ръководство за решаване на задачи по математика в средното училище.

Предпечатна подготовка с MiKTEX
Стефка Караколева

Уважаеми кандидат-студенти,

Ако вече сте решили да кандидатствате с изпит по математика, тази книга с решени теми ще бъде ваш пътеводител.

Ако още се колебаете дали да кандидатствате с изпит по математика, тази книга със сигурност ще ви помогне да решите.

Искате ли да успеете на изпита по математика?

Ето няколко «тайни» оръжия:

- «Математика» не се чете като роман, в хоризонтално положение. Седнете удобно на бюро, с тетрадка А4, молив, линия и пергел и ПИШЕТЕ!
- **Никога** не използвайте електронно–изчислителни машини (калкулатор, компютър), когато се подготвяте за кандидатстудентския изпит по математика. Тези «машинки», както всичко, направено от човешка ръка, не са съвършени. Те допускат при изчисленията грешки от закръгляване и могат да ви подведат. Освен това, на изпита те не са разрешени;
- Когато решавате задача по алгебра, първото (и последното) нещо, за което трябва да се погрижите, е *Множеството от допустими стойности* на променливата;
- Чертайте само с прибори: молив, линия и пергел. «Хубавият» и верен чертеж ще ви «реши» поне половината задача.

Как да проверите вашето ниво на подготовка по математика?

Първо си помислете каква оценка очаквате да получите на изпита? След това си изберете една тема за самоподготовка. Осигурете си листи, прибори за чертане, справочник с формули и четири часа тишина.

Докато решавате задачите, не се изкушавайте да поглеждате решенията! Това ще направите по-късно. Не бързайте, не бъдете прекалено самоуверени! Проверявайте всяка задача, защото и най-добрите грешат!

След като приключите с решаването на цялата тема, сравнете вашите решения с дадените.

Имайте предвид, че всяка от единадесетте теми за самоподготовка се състои от три части:

- Първата част включва задачи от 1 до 10 от затворен тип. Дадени са четири възможни отговора, като само само един от тях е верен. Всеки верен отговор на задача от първата част носи 2 точки. За грешен отговор не се отнемат точки;
- Втората част включва задачи от 11 до 14 от отворен тип. Задачите нямат посочени варианти за отговор. Верен отговор на задача от втора част носи 4 точки;
- Третата част включва задача 15. За нея се изисква пълно решение, което се оценява максимално с 8 точки.

Ако общият брой точки е k, оценката Ви е $2 + 0.1\,k$. Максималната оценка, която можете да получите е Отличен (6.00).

Доволни ли сте от резултата? Съвпада ли той с оценката, която искате да имате на официалния изпит? Ако не е така, имате нужда от допълнителна подготовка. Имате възможност да се включите в курс по математика, организиран от Съюза на Математиците в България–секция Русе (виж корицата на книгата). Тези курсове се ръководят от опитни професионалисти–преподаватели по математика, които ще ви помогнат да повишите оценката, получена по горната формула, поне с една-две единици.

Успех! Стефка Караколева

e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

гр. Русе, 2011.

Съдържание

ТЕМА 1

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 12.07.2000

Задача 1. Даден е квадратният тричлен

$$f(x) = x^2 - (m^2 - m + 7)\, x + 3m^2 - 3m - 6,$$

където m е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на m, за които единият от корените на уравнението $f(x) = 0$ е равен на единица;

б) При намерените стойности на m, да се определи и другият корен на уравнението $f(x) = 0$;

в) Ако $m = 3$, да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)$ в интервала $[0, 1]$.

Задача 2. Около окръжност с радиус r е описан трапец, с остри ъгли α и β при голямата основа.

а) Да се намери лицето на трапеца;

б) Да се пресметне лицето на трапеца при $r = 2\,cm$, $\alpha = 60^o$ и $\beta = 30^o$.

Задача 3. Основният ръб на правилна четириъгълна пирамида е равен на b, а ъгълът между два съседни околни ръба на пирамидата е равен на α.

а) Да се намери обемът на пирамидата;

б) Да се намери лицето на пълната повърхнина на пирамидата;

в). През върха на тази пирамида, успоредно на основен ръб, е прекарана равнина, която сключва с равнината на основата ъгъл β. Да се намери лицето на сечението, получено от пресичането на тази равнина с пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 12.07.2000

Задача 1.

а). Тъй като числото 1 е корен на уравнението $f(x) = 0$, то

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - (m^2 - m + 7) + 3m^2 - 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -2\ ,\ m_2 = 3.$$

б). При $m = -2$ и $m = 3$ се получава квадратното уравнение

$$x^2 - 13x + 12 = 0,$$

с корени $x_1 = 1$, $x_2 = 12$;

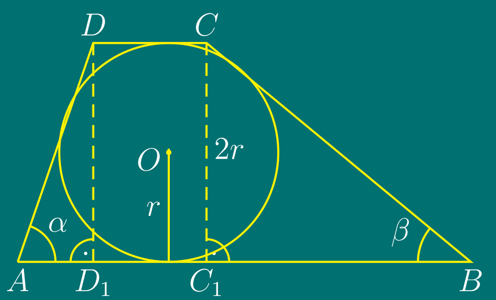
в). При $m = 3$, функцията $f(x)$ има вида $f(x) = x^2 - 13x + 12$. Първата ѝ производна е $f'(x) = 2x - 13$. Установява се, че

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < \frac{13}{2}.$$

Следователно в интервала $[0, 1]$ функцията $f(x)$ е намаляваща. Тогава

$$f_{\text{НГС}} = f(0) = 12 \quad , \quad f_{\text{НМС}} = f(1) = 0.$$

Задача 2.



а). Лицето на трапеца е

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot 2r = (AB + CD) \cdot r$$

Тъй като трапецът е описан около окръжност, то $AB + CD = AD + BC$.

От правоъгълните триъгълници $\triangle BC_1C$ и $\triangle AD_1D$ за бедрата на трапеца се получава:

$$BC = \frac{2r}{\sin\beta} \quad , \quad AD = \frac{2r}{\sin\alpha}$$

За лицето на трапеца:

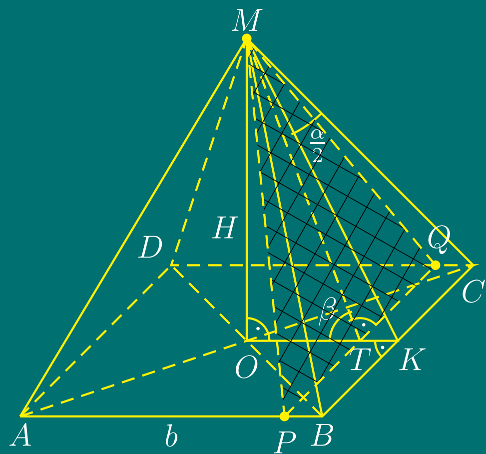
$$S = (AB + CD)\cdot r = (AD + BC)\cdot r = \left(\frac{2r}{\sin\alpha} + \frac{2r}{\sin\beta}\right)\cdot r$$

$$= 2r^2 \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{4r^2}{\sin\alpha\sin\beta}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ eg^2$$

б).

$$S = 8\cdot\frac{\sin 60^o + \sin 30^o}{\sin 60^o \sin 30^o} = \frac{16}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)\ cm^2$$

Задача 3.



а). Обемът на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot H = \frac{1}{3}\cdot b^2\cdot H$$

От $\triangle OMK$ по Питагорова Теорема

$$H = \sqrt{MK^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

От $\triangle BCM$ - равнобедрен следва, че MK – медиана, ъглополовяща и височина, следователно $BK = KC = b/2$ и $\angle KMC = \alpha/2$. От $\triangle CKM$:

$$MK = \frac{b}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

Следователно,

$$H = \frac{b}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\ eg\ .$$

За обема се получава

$$V = \frac{1}{3}\cdot b^2\cdot H = \frac{b^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\ eg^3$$

б). Лицето на пълната повърхнина на пирамидата е

$$S_1 = S + B$$

$$S = 4 \cdot S_{\triangle BCM} = 4 \cdot \frac{b \cdot MK}{2} = b^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \ eg^2$$

$$S_1 = b^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + b^2 = b^2 \left(1 + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right) \ eg^2$$

в). Лицето на сечението е

$$S_{\triangle PQM} = \frac{PQ \cdot MT}{2} = \frac{b \cdot MT}{2}$$

От $\triangle OTM$

$$MT = \frac{H}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$S_{\triangle PQM} = \frac{b \cdot H}{2\sin\beta} = \frac{b}{2\sin\beta} \cdot \frac{b\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}} \ eg^2$$

ТЕМА 2

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 13.07.2000

Задача 1. Да се разложи числото 10 на две събираеми така, че сумата от квадратите им да е равна на 58.

Задача 2. Еквивалентни ли са уравненията

$$\frac{x^2+6}{4-x^2} = \frac{5x}{x^2-4} \quad \text{и} \quad x^2+5x+6=0 \ .$$

Задача 3. Сумата от две естествени числа е 90. Сумата от 25% от първото число и 75% от второто число е 30. Кои са тези числа?

Задача 4. Да се реши неравенството

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2 > (x+3)^2+(x+4)^2+(x+5)^2 \ .$$

Задача 5. Да се реши неравенството

$$\frac{x^2-5x+6}{x^3-1} \geq 0 \ .$$

Задача 6. Да се реши уравнението

$$x^2-6x+\sqrt{x^2-6x+9} = -3 \ .$$

Задача 7. Да се реши уравнението

$$4^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 80 \ .$$

Задача 8. Да се решат неравенствата

$$1 < \log_4 x^2 \leq 3 \ .$$

Задача 9. Да се реши тригонометричното уравнение

$$9 - 20\cos^2 x - 12\sin x = 0 \ .$$

Задача 10. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{при} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}\,, 1\right]$$

Задача 11. В правоъгълен триъгълник ABC с катет $AC = 20$ е вписана полуокръжност с радиус 4, допираща се до катетите и имаща диаметър върху хипотенузата AB. Да се пресметне другият катет.

Задача 12. Да се намери лицето на трапец с диагонали $d_1 = 10$, $d_2 = 24$ и средна основа $m = 13$.

Задача 13. Да се намери радиусът на вписаната окръжност в правоъгълен триъгълник, ако ортогоналните проекции на катетите му върху хипотенузата са 144 и 25.

Задача 14. Да се пресметне височината на правилен тетраедър с ръбове, равни на $\sqrt{3}$.

Задача 15. Да се пресметне околният ръб на правилна триъгълна пирамида $ABCD$, за която $AD \perp BD \perp CD \perp AD$, ако височината ѝ от върха D към основата ABC е равна на 1.

Задача 16. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако обемът на пирамидата ACB_1D_1 е равен на 9, да се пресметне ръбът на куба.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 13.07.2000

Задача 1. Нека x_1 и x_2 са търсените събираеми:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1^2 + x_2^2 = 58, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1\,x_2 = 58, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1\,x_2 = 21, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = 7. \end{array}\right.$$

Задача 2. Не. Допустими стойности за първото уравнение са всички $x \neq \pm 2$, а за второто: $x \in \mathcal{R}$.

Задача 3. Нека a и b са търсените естествени числа:

$$\left|\begin{array}{l} a+b=90; \\ \frac{25}{100}a+\frac{75}{100}b=30; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=90-b; \\ a+3b=120; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=90-b; \\ 2b=30; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=75; \\ b=15. \end{array}\right.$$

Задача 4.

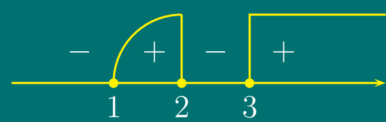
$$x^2-(x+3)^2+(x+1)^2-(x+4)^2+(x+2)^2-(x+5)^2>0 \Leftrightarrow$$

$$(2x+3)\cdot(-3)+(2x+5)\cdot(-3)+(2x+7)\cdot(-3)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{5}{2}$$

Задача 5.

$$\left|\begin{array}{l} (x-2)(x-3)(x-1)(x^2+x+1)\geq 0; \\ x\neq 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (x-2)(x-3)(x-1)\geq 0; \\ x\neq 1. \end{array}\right.$$

По метода на интервалите:



откъдето се получават решенията на системата $x\in(1,2]\cup[3,+\infty)$.

Задача 6. Допустими стойности на променливата са решенията на системата неравенства:

$$\text{ДС}: \quad \left|\begin{array}{l} x^2-6x+9\geq 0; \\ 6x-x^2-3\geq 0. \end{array}\right.$$

Полага се $\sqrt{x^2-6x+9}=y$ с допустими стойности за новата променлива $y\geq 0$. Получава се уравнението $y^2+y-6=0$ с корени $y_1=-3\notin$ ДС , $y_2=2\in$ ДС. От полагането

$$\sqrt{x^2-6x+9}=2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x_1=1\ ,\ x_2=5.$$

Задача 7.

$$2^{2x-2}\cdot 5^{2x+1}=80 \Leftrightarrow 2^{2x+1-3}\cdot 5^{2x+1}=80 \Leftrightarrow (10)^{2x+1}=80\cdot 8 \Leftrightarrow 10^{2x}=2^6 \Leftrightarrow x=3\lg 2$$

Задача 8.

$$\log_2 2<\log_{2^2} x^2\leq \log_2 2^3 \Leftrightarrow 2<\mid x\mid\leq 8 \Leftrightarrow x\in[-8,-2)\cup(2,8]$$

Задача 9.

$$9-20\left(1-\sin^2 x\right)-12\sin x=0.$$

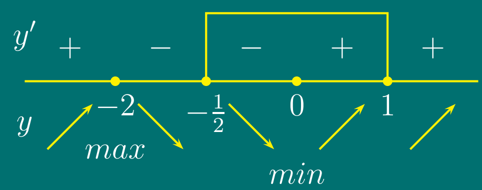
Полага се $\sin x = y$ с допустими стойности за новата променлива $y \in [-1, 1]$. Получава се квадратно уравнение $20y^2 - 12y - 11 = 0$, с корени $y_1 = \frac{11}{10} \notin$ ДС и $y_2 = -\frac{1}{2} \in$ ДС. Тогава

$$\sin x = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Задача 10. Първата производна на функцията е

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

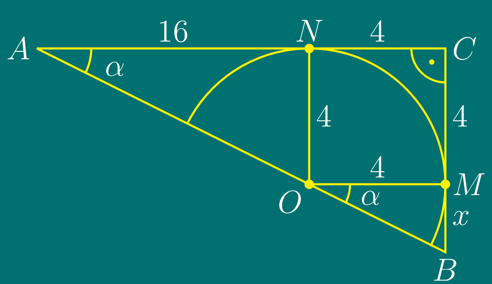
Решава се уравнението $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -2$.



Изследва се знакът на първата производна, определят се локалните екстремуми и стойностите на функцията в краищата на интервала $[-\frac{1}{2}, 1]$. Получава се $f_{max}(-2) = -4$, $f_{min}(0) = 0, f(-1/2) = 1/2, f(1) = 1/2$.

$$f_{\text{нгс}} = \max\left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right), f(1) \right\} = \frac{1}{2} \quad , \quad f_{\text{нмс}} = f_{max}(0) = 0$$

Задача 11.

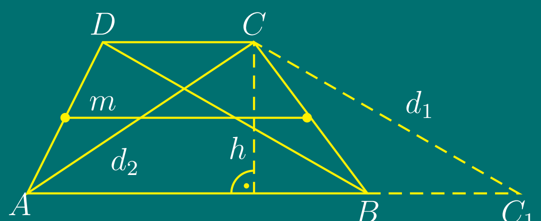


Нека $BM = x$, $BC = 4 + x$. Тъй като $ON \perp AC$, $OM \perp BC$, $AC \perp BC$ и $CN = CM$ следва, че $OMCN$ е квадрат. От подобието на триъгълниците $\triangle AON \sim \triangle OBM \Rightarrow$

$$\frac{AN}{OM} = \frac{NO}{MB} \Leftrightarrow \frac{16}{4} = \frac{4}{x} \; ,$$

откъдето $x = 1 \Rightarrow BC = 4 + 1 = 5$.

Задача 12.



Построява се права през върха C, успоредна на диагонала BD и $CC_1 \cap AB = C_1$. Тъй като $ABCD$ - трапец и $AB \parallel DC$, то BC_1CD е успоредник и $AC_1 = AB + BC_1 = AB + DC = 2m = 26$.

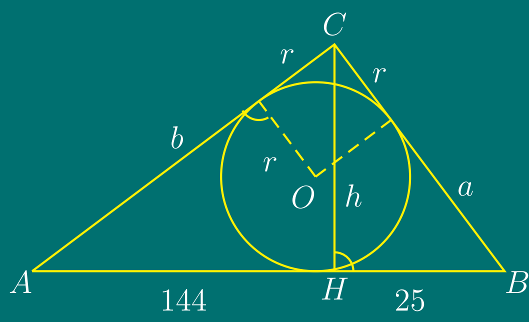
Тъй като $AB + CD = 2m$, за лицето на трапеца се получава

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = m \cdot h = S_{AC_1C}$$

Лицето на $\triangle AC_1C$ се намира по Херонова формула. Полупериметърът на $\triangle AC_1C$ е $p = (AC_1 + d_1 + d_2)/2 = (26 + 10 + 24)/2 = 30$. Лицето на $\triangle AC_1C$ е:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{30 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 6} = 120\, eg^2 \ \Rightarrow S_{ABCD} = 120\, eg^2.$$

Задача 13.



От Теоремата на Евклид за височината в правоъгълен триъгълник, $h^2 = AH \cdot HB = 144 \cdot 25 \Rightarrow h = 60$.

$$S_\triangle = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{169 \cdot 60}{2} = 5070.$$

От друга страна

$$S_\triangle = p\, r = 5070 \Rightarrow r = \frac{5070}{p}$$

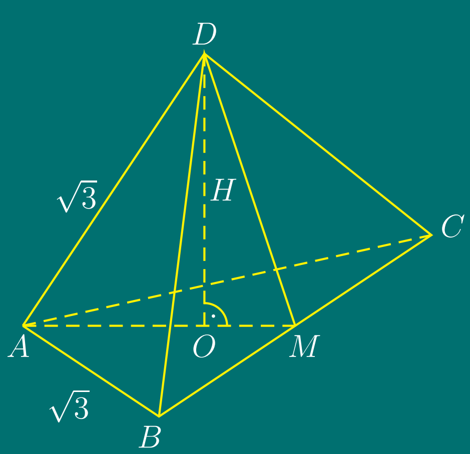
От Теоремата за катетите на Евклид

$$a^2 = AB \cdot HB = 169 \cdot 25 \Rightarrow a = 65,$$

$$b^2 = AB \cdot AH = 169 \cdot 144 \Rightarrow b = 156,$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{65 + 156 + 169}{2} = 195 \Rightarrow r = \frac{5070}{195} = 26.$$

Задача 14.



По условие всички стени на тетраедъра са равностранни триъгълници. DM е височина, ъглополовяща и медиана в $\triangle BCD$,

$$DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

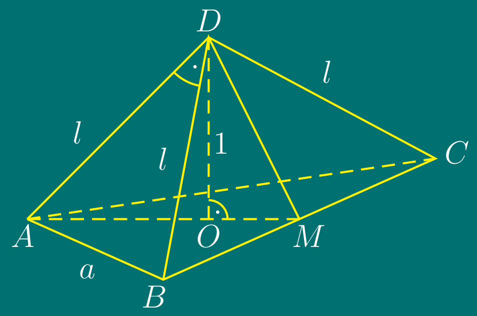
Аналогично за AM се получава

$$AM = \frac{3}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

От $\triangle OMD$ по Питагорова теорема:

$$H^2 = MD^2 - OM^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow H = \sqrt{2}.$$

Задача 15.



Околните стени на пирамидата са равнобедрени правоъгълни триъгълници. Нека околният ръб на пирамидата е l, а основният ръб е a.

Триъгълник $\triangle BCD$ е равнобедрен правоъгълен, следователно

$$l = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad , \quad DM = \frac{a}{2}\ .$$

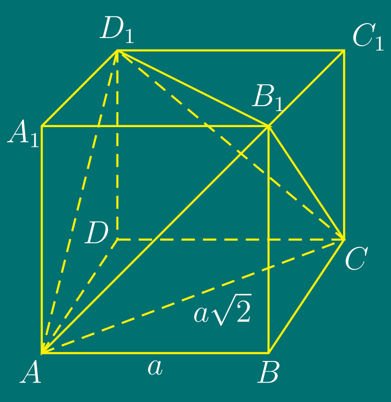
От $\triangle ABC$ – равностранен,

$$BM = \frac{a}{2} \quad , \quad AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad , \quad OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}\ .$$

От $\triangle OMD$ по Теорема на Питагор,

$$OM^2 + OD^2 = DM^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{12} + 1 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow l = \sqrt{3}.$$

Задача 16.



Нека обемът на куба е V_c, а обемът на пирамидата $ABCB_1$ е V_p. Тогава

$$V_c - 4 \cdot V_p = V_{ACD_1B_1}.$$

Пирамидата $ABCB_1$ има височина a и основа правоъгълен равнобедрен триъгълник с катети a. Следователно:

$$a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = 9 \Leftrightarrow a = 3\ .$$

ТЕМА 3

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 17.07.2001

Задача 1. Даден е квадратният тричлен

$$f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 3m^2 - 11,$$

където m е реален параметър.

а) За кои стойности на m уравнението $f(x) = 0$ има реални и различни корени;

б) За кои стойности на m функцията $f(x)$ приема най-малка стойност при $x = 2$;

в) За кои стойности на m уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена x_1 и x_2, които удовлетворяват зависимостта

$$x_1^2 + x_2^2 = 16.$$

Задача 2. Окръжност е вписана в правоъгълен трапец $ABCD$, правите ъгли на който са при върховете A и D. Разстоянието от центъра O на окръжността до точката B е d, а острият ъгъл на трапеца при върха B е α.

а) Докажете, че триъгълникът OBC е правоъгълен;

б) Намерете периметъра на трапеца;

в) Намерете лицето на трапеца. Пресметнете това лице за $d = 2\,cm$ и $\alpha = 60^o$.

Задача 3. Дадена е пирамида с връх точката M и основа равнобедрения триъгълник ABC, в който острият ъгъл между бедрата AC и BC е α. Всички околни ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата ѝ един и същ ъгъл β.

а) Да се намери обемът на пирамидата, ако бедрото на триъгълника ABC е равно на a;

б) През основния ръб AB и средата на височината на пирамидата е построена равнина, която сключва с равнината на основата ѝ ъгъл φ. Намерете $\operatorname{tg}\varphi$.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 17.07.2001

Задача 1.

а). Уравнението $f(x) = 0$ има реални и различни корени ($x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$), ако дискриминантата $D > 0$:

$$D = (m-1)^2 - (3m^2 - 11) = -2m^2 - 2m + 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 < 0$$

Квадратният тричлен в лявата страна на полученото неравенство има корени $m_1 = -3$ и $m_2 = 2$, следователно $m^2 + m - 6 < 0$ при $-3 < m < 2$, т.е. $m \in (-3, 2)$.

б). Първата производна на функцията $f(x)$ е $f'(x) = 2x + 2(m-1)$. При $x = 2$ функцията $f(x)$ приема най-малка стойност, следователно $f'(2) = 0$:

$$f'(2) = 4 + 2(m-1) = 0 \Rightarrow m = -1.$$

При $m = -1$, функцията е $f(x) = x^2 - 4x - 8$. Тогава $f_{\text{НМС}}(2) = 4 - 8 - 8 = -12$.

в). $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ при $D > 0$, т.е. $m \in (-3, 2)$

$$x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16$$

От Формулите на Виет

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -2(m-1); \\ x_1x_2 = 3m^2 - 11. \end{array}\right.$$

Тогава

$$m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -5 \notin (-3, 2)\ ,\ m_2 = 1 \in (-3, 2).$$

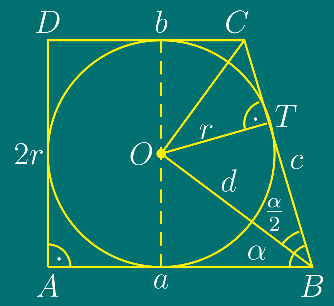
Следователно, при $m = -1$ уравнението $f(x) = 0$ има реални и различни корени x_1, x_2, които удовлетворяват условието $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

Задача 2.

а). Нека $\angle ABC = \alpha$.

Тъй като CO е ъглополовяща на $\angle DCB$, BO е ъглополовяща на $\angle ABC$ и $\alpha + \angle BCD = \pi$ (тъй като $AB \parallel CD$), то

$$\angle OBC = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad \angle BCO = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\ .$$



Тъй като сумата от ъглите в триъгълник е $\pi/2$, то за $\angle BOC$ се получава:

$$\angle BOC = \pi - \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

т.е. $\triangle OBC$ е правоъгълен.

б). От $\triangle OTB$:

$$r = d\sin\frac{\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad h = AD = 2r = 2d\sin\frac{\alpha}{2}\ .$$

От $\triangle OBC$:

$$d = c\cos\frac{\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad c = \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Трапецът е описан около окръжност, следователно $a + b = 2r + c$. Тогава

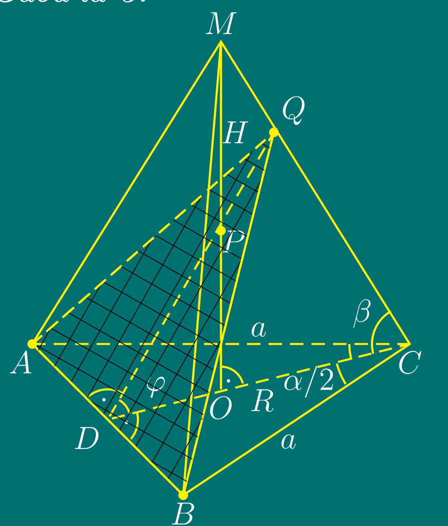
$$P = 2\cdot(2r + c) = 2\cdot\left(2d\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{4d}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\ eg$$

в). За лицето на трапеца имаме:

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot 2r = \frac{2r+c}{2}\cdot 2r = \frac{P}{4}\cdot 2r = 2d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ eg^2$$

$$S = 2\cdot 4\cos^2 15^o\operatorname{tg}30^o = 8\cdot\frac{1+\cos 30^o}{2}\operatorname{tg}30^o = 4\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3)\ eg^2$$

Задача 3.



а). Нека е O е ортогоналната проекция на върха M върху равнината на $\triangle ABC$.

От подобието на триъгълниците

$$\triangle AOM \cong \triangle BOM \cong \triangle COM$$

1. OM – обща;
2. $\angle AOM = \angle BOM = \angle COM = 90^o$
3. $\angle OAM = \angle OBM = \angle OCM = \beta$

следва, че $OA = OB = OC$. Следователно O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

$\triangle ABC$ е равнобедрен, следователно CD - височина, ъглополовяща и медиана $\Rightarrow \angle ACD = \angle DCB = \frac{\alpha}{2}$ и $AD = DB = \frac{1}{2}AB$.

От $\triangle BDC$

$$BD = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow AB = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

От Синусова Теорема за $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

От $\triangle OCM$

$$H = R \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Лицето на основата е

$$B = \frac{AB \cdot CD}{2}$$

От $\triangle BDC$

$$CD = a\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \cdot 2a\sin\frac{\alpha}{2} \cdot a\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\sin\alpha}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sin\alpha}{2} \cdot \frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3}{6} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta\ eg^2$$

б). От $\triangle DOP$ – правоъгълен $\Rightarrow$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{H}{2}}{OD}$$

От $\triangle BDC \Rightarrow$

$$OD = CD - R = a\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Следователно

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\beta}{4\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{a\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos\alpha}\ .$$

ТЕМА 4

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 18.07.2001

Задача 1. Числото 46 да се представи като сбор на две събираеми, частното на които е $1,3$.

Задача 2. Да се реши системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} 5(x+1)+6(x+2)>9(x+3) \\ 7x-3(2x+3)>2(x-18) \end{array} \right.$$

Задача 3. Единият корен на уравнението $x^2-4x+k=0$ е $x_1=2-\sqrt{3}$. Кое е числото k?

Задача 4. За кои стойности на реалния параметър m корените на уравнението

$$x^2-2(2m-3)x+3m^2+5m+9=0$$

са равни?

Задача 5. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които между корените x_1 и x_2 на уравнението

$$x^2-3a\,x+a^2=0$$

съществува зависимостта

$$x_1^2+x_2^2=1,75.$$

Задача 6. Да се реши уравнението

$$\log_2(6x+2)-\log_2(x-1)=3.$$

Задача 7. Решете уравнението

$$\frac{1}{3x} + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{3}{2}\ , \text{ при } |\ x\ | < 1.$$

Задача 8. Да се докаже тъждеството:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

Задача 9. Да се реши тригонометричното уравнение

$$3\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Задача 10. Да се намери лицето на успоредник, със страна $14\,cm$ и диагонали $26\,cm$ и $30\,cm$.

Задача 11. В равнобедрен трапец с лице $20\,cm^2$ е вписана окръжност. с радиус $2\,cm$. Намерете страните на трапеца.

Задача 12. Разстоянието между центровете на две пресичащи се окръжности с радиуси $17\,cm$ и $10\,cm$ е равно на $21\,cm$. Намерете разстоянията от центровете до точката, в която общата външна допирателна пресича правата, минаваща през центровете на окръжностите.

Задача 13. Срещуположните околни стени на правилна четириъгълна пирамида са взаимно перпендикулярни. Да се намери обемът на пирамидата, ако основният и ръб е равен на $a\,cm$.

Задача 14. В правилна четириъгълна пресечена пирамида основните ръбове се отнасят както $1:2$, двустенният ъгъл при голямата основа е 30^o, а височината ѝ е $5\,cm$. Да се намери лицето на околната повърхнина.

Задача 15. Околната повърхнина на цилиндър е $\frac{2}{3}$ от повърхнината му. Да се намери ъгълът между диагоналите на осното сечение на цилиндъра.

Задача 16. Кълбо с радиус $r = 4\,cm$ е вписано в права призма с основа равнобедрен трапец. Да се намери обемът на призмата, ако бедрото на трапеца е $c = 10\,cm$.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев» 18.07.2001

Задача 1. Нека x и y са търсените числа, които трябва да удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} x+y=46 \\ \frac{x}{y}=1,3 \end{array} \right.$$

От второто уравнение се изразява $x=1,3\,y$ и се замества в първото: $2,3\,y = 46 \Leftrightarrow y=20$, откъдето $x=1,3\cdot 20=26$.

Задача 2. От първото неравенство след разкриване на скобите се получава неравенството $11x+17>9x+27 \Leftrightarrow x>5$, а от второто: $x-9>2x-36 \Leftrightarrow -x+27>0 \Leftrightarrow x<27$. Следователно, интервалът $5<x<27$ е решение на системата.

Задача 3. Щом $x_1=2-\sqrt{3}$ е корен на уравнението, то това число, заместено вместо x в уравнението, го превръща в тъждество, т.е.

$$(2-\sqrt{3})^2-4(2-\sqrt{3})+k=0 \Leftrightarrow k=1.$$

Задача 4. За да са равни корените на квадратно уравнение, трябва дискриминантата $D=0$.

$$D=(2m-3)^2-\left(3m^2+5m+9\right)=0 \Leftrightarrow m(m-17)=0 \Leftrightarrow m_1=0\ ,\ m_2=17.$$

Задача 5. По условие

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{7}{4}.$$

От Формулите на Виет:

$$x_1+x_2=3a\ ,\ x_1\,x_2=a^2,$$

откъдето

$$(3a)^2-2a^2=\frac{7}{4} \Leftrightarrow 7a^2=\frac{7}{4} \Leftrightarrow a_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\ .$$

Задача 6. Допустимите стойности за променливата, удовлетворяваща логаритмичното уравнение

$$\log_2(6x+2)-\log_2(x-1)=3\cdot\log_2 2$$

са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС:}\quad \left| \begin{array}{l} 6x+2>0 \\ x-1>0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x>-\frac{1}{3} \\ x>1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x>1$$

От свойствата на логаритмите

$$\log_2 \frac{6x+2}{x-1} = \log_2 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6x+2}{x-1} = 8 \Leftrightarrow x = 5 \in \text{ДС}.$$

Задача 7. Лявата страна на уравнението, без първото събираемо е сума на безкрайна геометрична прогресия с първи член $a_1 = x$ и частно $q = x$, при $\mid x \mid < 1$. Както е известно, тази сума е

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-x}.$$

Тогава уравнението е еквивалентно на

$$\frac{1}{3x} + \frac{x}{1-x} = \frac{3}{2}\ .$$

След освобождаване от знаменател и преобразуване, се получава квадратно уравнение $15x^2 - 11x + 2 = 0$ с корени $x_1 = 2/5$ и $x_2 = 1/3$.

Задача 8. Нека да означим лявата страна с A, а дясната с B.

$$A = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$B = \frac{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

Тъждеството е доказано.

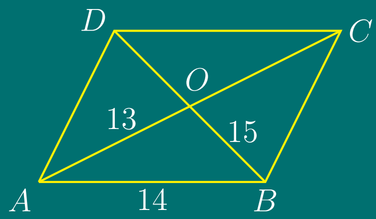
Задача 9.

$$3\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 3\sin x - (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Полага се $\sin x = y$, с допустими стойности на новата променлива $-1 < y < 1$. Полученото квадратно уравнение $2y^2 + 3y - 2 = 0$ има корени $y_1 = 1/2$ и $y_2 = -2$, от които само първото е допустимо. Решава се тригонометричното уравнение

$$\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Задача 10.



По Херонова формула за лицето на $\triangle ABO$ се получава

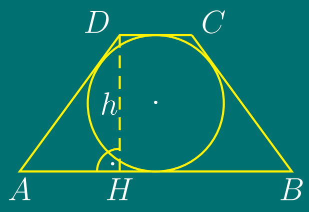
$$S_{\triangle ABO} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84\, cm^2$$

Тогава за лицето на успоредника се получава

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle ABO} = 4 \cdot 84 = 336\, cm^2.$$

Задача 11.



Нека $AB = a$, $DC = b$, $AD = BC = c$. Тъй като трапецът е описан около окръжност с радиус $r = 2$, то $a + b = 2c$. От формулата за лице на трапец

$$S = \frac{2c \cdot 2r}{2} \Leftrightarrow 20 = 4c \Leftrightarrow c = 5\, cm$$

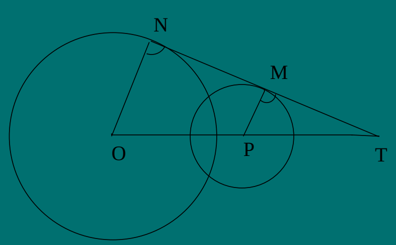
От $\triangle AHD$ имаме $AH = (a - b)/2$ и по Теорема на Питагор

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 - (2r)^2 \Leftrightarrow a - b = 6.$$

Така се получава система

$$\left| \begin{array}{l} a + b = 10 \\ a - b = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow a = 8\, cm, \quad b = 2\, cm.$$

Задача 12.

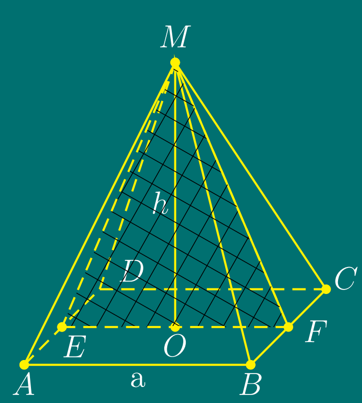


Нека $PT = x$, $OT = 21 + x$. От $\triangle OTN \sim \triangle PTM$ следва, че

$$\frac{17}{10} = \frac{21 + x}{x} \Leftrightarrow 7x = 210 \Leftrightarrow x = 30$$

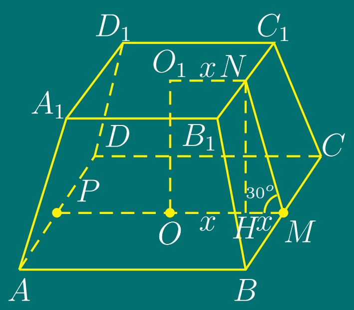
$$\Rightarrow PT = 30\, cm \ \Rightarrow OT = 51\, cm$$

Задача 13.



Нека E и F са среди съответно на AD и BC, а $\angle EMF = 90^o$. $\triangle EMF$ е равнобедрен правоъгълен с основа $EF = a$. Следователно $OM = a/2$. Тогава $V = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{6}$.

Задача 14.



Нека $O_1N = x \Rightarrow OM = 2x \Rightarrow OH = HM = x$. В $\triangle HNM$, $\angle HMN = 30^o$

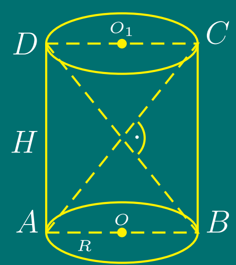
$$MN = \frac{HN}{\sin 30^o} = 10$$

$MH = 5 \cdot \mathrm{cotg}30^o = 5\sqrt{3}$. Следователно $BC = 20\sqrt{3}$, $B_1C_1 = 10\sqrt{3}$.

Тогава за лицето имаме

$$S = 4 \cdot \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot MN = 600\sqrt{3}\,cm^2.$$

Задача 15.



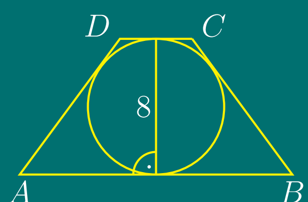
Нека S е околната повърхнина, а S_1 – пълната повърхнина на цилиндъра. По условие

$$S = \frac{2}{3}S_1 \Leftrightarrow S = \frac{2}{3}(S + 2B) \Leftrightarrow$$

$$S = 4B \Leftrightarrow 2\pi RH = 4\pi R^2 \Leftrightarrow H = 2R.$$

Следователно $ABCD$ е квадрат и $\angle(AC, BD) = 90^o$.

Задача 16.



Нека $ABCD$ е основата на призмата, $h = H = 2r = 8$. От $ABCD$ – описан $\Rightarrow AB + CD = 2c$.

$$B = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{2c \cdot 2r}{2} = 2 \cdot c \cdot r = 2 \cdot 10 \cdot 4 = 80\,cm^2$$

$$V = B \cdot H = 80 \cdot 8 = 640\,cm^3$$

ТЕМА 5

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 17.07.2002

Задача 1. Дадена е функцията

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + 1,$$

където b и c са реални параметри. Да се определят тези параметри така, че:

а) b е корен на уравнението

$$\lg(4x + 10) + \lg 8 = \lg(x + 3) + 2\lg 4;$$

б) c е корен на уравнението

$$\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{10x + 6};$$

в) за намерените стойности на b и c да се пресметнат локалните екстремуми на функцията $y = f(x)$.

Задача 2. Равнобедрен трапец $ABCD$ с основи AB и CD $(AB > CD)$ е описан около окръжност.

а) да се докаже, че отношението от лицето на кръга и лицето на трапеца е равно на отношението на дължината на окръжността и периметъра на трапеца;

б) ако $AB = 16\,cm$ и $CD = 9\,cm$, а Q е пресечната точка на правите AD и BC, да се намерят периметърът и лицето на трапеца, както и лицето на триъгълника DCQ.

Задача 3. В правилна четириъгълна пирамида с височина H и ъгъл α между околната стена и равнината на основата е вписано кълбо.

а) да се намери обемът на пирамидата;

б) да се намери обемът на кълбото;

в) да се намери синусът на ъгъл β между околната стена и равнината на диагоналното сечение на пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 17.07.2002

Задача 1.

а). Допустими стойности за променливата са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС}: \left| \begin{array}{l} 4x+10>0 \\ x+3>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x>-\frac{5}{2} \\ x>-3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\log(4x+10)\cdot 8 = \log 16(x+3) \Leftrightarrow 8(4x+10) = 16(x+3) \Leftrightarrow x = -2 \in \text{ДС}$$

Следователно $b = -2$.

б). Допустими стойности за променливата са решенията на системата

$$\text{ДС}: \left| \begin{array}{l} 5x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 10x+6 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{5} \\ x \geq -1 \\ x \geq -\frac{3}{5} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

Повдигат се двете страни на уравнението на втора степен:

$$5x+1+2\sqrt{(5x+1)(x+1)}+x+1 = 10x+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2+6x+1} = 4x+4.$$

От ДС следва, че $4x+4>0$. Отново се повдигат двете страни на уравнението на втора степен:

$$5x^2+6x+1 = 4x^2+8x+4 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x_1 = 3\ ,\ x_2 = -1 \in \text{ДС} \Rightarrow c = 3.$$

в). При $b=-2$ и $c=3$ функцията има вида:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Първата ѝ производна е

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Намират се критичните точки от уравнението

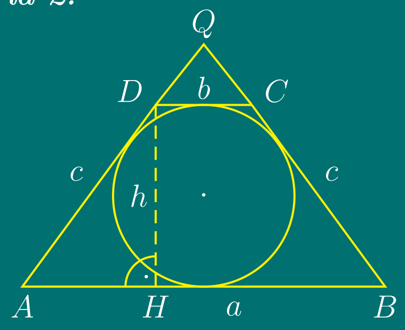
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1\ ,\ x_2 = 3.$$

Изследва се знакът на първата производна. Тъй като коефициентът пред x^2 е $1>0$, квадратният тричлен е положителен за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ и отрицателен за $x \in (1,3)$.

Следователно, функцията f има максимум при $x = 1$ и минимум при $x = 3$:

$$f_{max} = f(1) = \frac{7}{3} \quad , \quad f_{min} = f(3) = 1$$

Задача 2.



Нека $AB = a$, $DC = b$, $AD = BC = c$. Тъй като трапецът е описан около окръжност с радиус r, то $S_{ABCD} = p \cdot r$, където p е полупериметърът на трапеца.

$$\frac{S_{kr}}{S_{tr}} = \frac{l_{okr}}{P_{tr}} \Leftrightarrow \frac{\pi r^2}{p \cdot r} = \frac{2\pi r}{2p},$$

което очевидно е вярно.

а). Тъй като трапецът е описан около окръжност,

$$a + b = 2c \Leftrightarrow 16 + 9 = 2c \Leftrightarrow c = \frac{25}{2},$$

и $h = 2r$. От $\triangle AHD$

$$AH = \frac{a-b}{2} = \frac{16-9}{2} = \frac{7}{2}$$

От $\triangle AHD$ по Теорема на Питагор:

$$DH = h = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 12.$$

За периметъра и лицето на трапеца се получава

$$P_{tr} = a + b + 2c = 4c = 4 \cdot \frac{25}{2} = 50\,cm$$

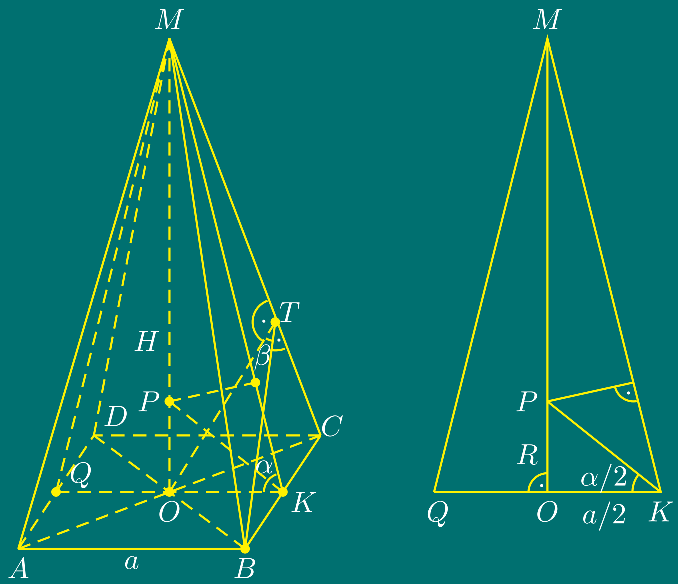
$$S_{tr} = \frac{a+b}{2} \cdot h = c \cdot h = \frac{25}{2} \cdot 12 = 150\,cm^2$$

От подобието на триъгълниците $\triangle DCQ \sim \triangle ABQ$:

$$\frac{S_{\triangle DCQ}}{S_{\triangle ABQ}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle DCQ}}{S_{tr} + S_{\triangle DCQ}} = \left(\frac{9}{16}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{S_{\triangle DCQ}}{150 + S_{\triangle DCQ}} = \frac{81}{256} \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle DCQ}}{150} = \frac{81}{175} \Leftrightarrow S_{\triangle DCQ} = \frac{81}{175} \cdot 150 = \frac{486}{7}\,cm^2$$

Задача 3.



а). Нека основният ръб на пирамидата е a. Основата е квадрат, следователно $OK = a/2$.

Върхът M се проектира в центъра на квадрата.

$$OK \perp BC \text{ и } OK = np_{(ABC)}MK \Rightarrow MK \perp BC$$

и по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че двустенният ъгъл между околната стена и основата е $\angle OKM = \alpha$.

От $\triangle OKM$ – правоъгълен:

$$\frac{OK}{H} = \operatorname{cotg}\alpha \Rightarrow OK = H\operatorname{cotg}\alpha \Rightarrow a = 2\cdot OK = 2\cdot H\operatorname{cotg}\alpha.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot H = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 4H^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cdot H = \frac{4}{3}H^3\operatorname{cotg}^2\alpha\ .$$

б). Нека P е центърът на кълбото, $OP = R$ е радиусът му. KP е ъглополовяща на $\angle OKM \Rightarrow \angle OKP = \frac{\alpha}{2}$. От $\triangle OKP$:

$$\frac{OP}{OK} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{R}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = H\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi H^3\operatorname{cotg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$

в). Нека $OT \perp CM$. От $BO \perp AC$ и $BO \perp MO$ следва, че $BO \perp (ACM)$. Следователно т. O е проекция на т. B върху равнината (ACM), т.е $O = np_{(ACM)}B$. От $OT = np_{(ACM)}BT$ и $OT \perp MC$ по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че $BT \perp MC$, откъдето следва, че $\angle BTO = \beta$.

От $\triangle OTB$ – правоъгълен:

$$\sin\beta = \frac{OB}{BT} \tag{5.1}$$

От $\triangle BCM$:

$$BC \cdot MK = MC \cdot BT \tag{5.2}$$

От $\triangle MOC$:

$$MC = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}\cdot H \cdot \operatorname{cotg}\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{H^2 + 2H^2\operatorname{cotg}^2\alpha} =$$

$$= H\sqrt{1 + \frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$$

От $\triangle OKM$:

$$\frac{H}{MK} = \sin\alpha \Rightarrow MK = \frac{H}{\sin\alpha}$$

От (5.2) следва

$$a \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}\cdot BT \Leftrightarrow BT = \frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

Тогава от (5.1) следва

$$\sin\beta = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}} = \sqrt{\frac{1+\cos^2\alpha}{2}}\,.$$

ТЕМА 6

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 18.07.2002

Задача 1. Намерете стойността на израза

$$A = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Задача 2. Да се реши неравенството

$$5x^2 - 4x - 9 \geq 2(x+3)(x-1)$$

Задача 3. Решете уравнението

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$$

Задача 4. Решете уравнението

$$5^{\sqrt{3x-2}+1} = 125^{\sqrt{x-1}}$$

Задача 5. Решете уравнението

$$\lg(3x^2 - 2x) = \lg(5x - 4)$$

Задача 6. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{array}\right.$$

Задача 7. Да се намери границата

$$l = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 3x - 10}$$

Задача 8. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 8 \quad \text{при } x \in [1, 4].$$

Задача 9. Да се намери лицето на успоредник със страна $14\,cm$ и диагонали $26\,cm$ и $30\,cm$.

Задача 10. Да се пресметне стойността на израза

$$A = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \text{ако } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -0,2\,.$$

Задача 11. Да се реши тригонометричното уравнение

$$2\sin^2 x - 4 = -5\cos x$$

Задача 12. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с основа AB. Да се намери радиусът на окръжността, описана около триъгълника, ако $AC = 12\,cm$ и $AB = 8\sqrt{5}\,cm$.

Задача 13. Права триъгълна призма с основни ръбове $13\,cm$, $14\,cm$ и $15\,cm$ е описана около кълбо. Да се намерят обемите на кълбото и призмата.

Задача 14. Лицето на основата на пирамида е $150\,cm^2$, лицето на успоредното сечение е $54\,cm^2$, а разстоянието между тях е $14\,cm$. Да се намери височината на пирамидата.

Задача 15. Да се намери обемът на триъгълна пирамида, два срещуположни ръба на която са $4\,cm$ и $12\,cm$, а останалите са по $7\,cm$.

Задача 16. Равнобедрен триъгълник с периметър $30\,cm$ се върти около височината си към основата му. Повърхнината на получения конус е $60\pi\,cm^2$. Да се намерят страните на триъгълника.

Решения

Решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 18.07.2002

Задача 1.

$$A = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Задача 2. След разкриване на скобите и опростяване се получава еквивалентно неравенство

$$3x^2 - 8x - 3 \geq 0.$$

Корените на квадратния тричлен в лявата страна са $x_1 = 3$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Решенията на неравенството са:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)$$

Задача 3. Допустими стойности за променливата са $x \geq 4$.

Повдигат се двете страни на уравнението на втора степен:

$$x + 4 + 2\sqrt{x^2 - 16} + x - 4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$$

Тъй като лявата страна на полученото ирационално уравнение е неотрицателна, дясната страна също трябва да е неотрицателна:

$$8 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 8 \Rightarrow \text{ДС: } x \in [4, 8]$$

Отново се повдигат на втора степен двете страни на полученото уравнение:

$$x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow 16x = 80 \Leftrightarrow x = 5 \in \text{ДС}$$

Задача 4. Допустими стойности за променливата са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС}: \left| \begin{array}{l} 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

От свойствата на показателната функция

$$5^{\sqrt{3x-2}+1} = 5^{3\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} + 1 = 3\sqrt{x - 1}$$

Повдигат се двете страни на втора степен:

$$3x - 2 + 2\sqrt{3x - 2} + 1 = 9(x - 1) \Leftrightarrow \sqrt{3x - 2} = 3x - 4.$$

Тъй като лявата страна на полученото ирационално уравнение е неотрицателна, дясната страна също трябва да е неотрицателна:

$$3x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{ДС: } x\in\left[\frac{4}{3},+\infty\right]$$

Отново се повдигат на втора степен двете страни на полученото уравнение:

$$3x-2=9x^2-24x+16 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1\notin \text{ДС},\ x_2=2\in\text{ДС}$$

Задача 5. Допустими стойности за променливата са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС}: \left| \begin{array}{l} x(3x-2)>0 \\ 5x-4>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right) \\ x\in\left(\frac{4}{5},+\infty\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$3x^2-2x=5x-4 \Leftrightarrow 3x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{4}{3}\in\text{ДС},\ x_2=1\in\text{ДС}$$

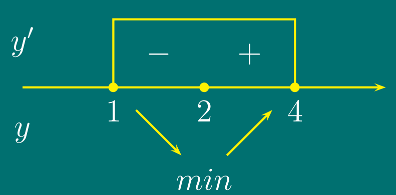
Задача 6. От свойствата на показателната функция, дадената система е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Задача 7.

$$l=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+5)}=\frac{12}{7}$$

Задача 8.



Първо се изследва функцията за локални екстремуми.

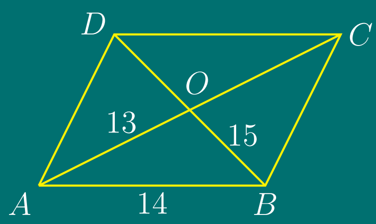
Първата производна е $y'(x)=2x-4$. След като се реши уравнението $y'=0$, се получава критична точка $x=2$.

Изследва се знакът на първата производна. Определят се екстремумите и стойностите на функцията в краищата на интервала.

$$y_{min}(2)=4, \quad y(1)=5, \quad y(4)=8$$

$$y_{\text{нгс}}=\max\{y(1)\ ,\ y(4)\}=y(4)=8 \quad , \quad y_{\text{нмс}}=y_{min}(2)=4$$

Задача 9.



По Херонова формула за лицето на $\triangle ABO$ имаме

$$S_{\triangle ABO} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84\,cm^2.$$

Тогава за лицето на успоредника се получава:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle ABO} = 4 \cdot 84 = 336\,cm^2.$$

Задача 10.

$$A = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = -5$$

Задача 11.

$$2(1-\cos^2 x) - 4 = -5\cos x$$

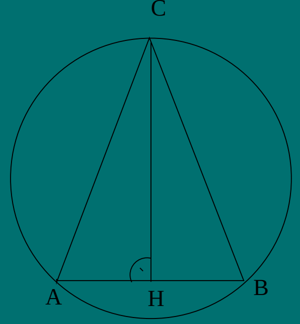
Полага се $\cos x = t$, с допустими стойности за новата променлива $t \in [-1,1]$ и се получава уравнението

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2 \notin [-1,1]\ ,\ t_2 = \frac{1}{2} \in [-1,1]$$

От полагането

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ , \quad k = 0, \pm1, \pm2\ldots$$

Задача 12.



По условие $\triangle ABC$ е равнобедрен, следователно CH е височина, ъглополовяща и медиана и

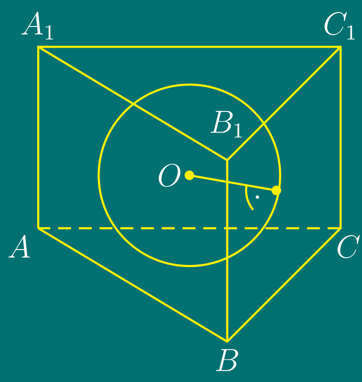
$$AH = HB = 4\sqrt{5}.$$

От $\triangle AHC$ по Теорема на Питагор:

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{144-80} = 8$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4\,R} = \frac{AB \cdot CH}{2} \Rightarrow R = \frac{BC \cdot AC}{2 \cdot CH} = \frac{12 \cdot 12}{2 \cdot 8} = 9\,cm$$

Задача 13.



Нека радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е r.

Ортогоналната проекция на кълбото върху равнината на основата на призмата е вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Следователно радиусът на вписаното в призмата кълбо е r, а височината на призмата е $2r$.

Нека V_k е обема на кълбото, V_p е обема на призмата:

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad V_p = B \cdot H = B \cdot 2r \ .$$

По Херонова формула за лицето на $\triangle ABC$:

$$B = S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84\,cm^2.$$

От друга страна

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r \Leftrightarrow 84 = 21 \cdot r \Leftrightarrow r = 4\,cm$$

Тогава

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi\,cm^3 \quad , \quad V_p = B \cdot 2r = 84 \cdot 2 \cdot 4 = 672\,cm^3.$$

Задача 14.

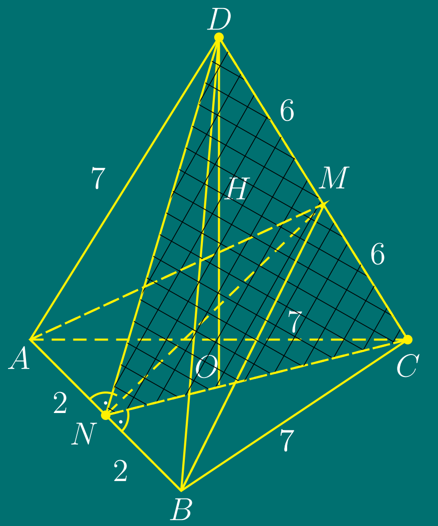
Нека H е височината на пирамидата.

Сечението на пирамидата с равнина, успоредна на основата е равнинна фигура, подобна на основата. Това сечение разделя пирамидата на две тела – пресечена пирамида и пирамида. Лицата на основите на двете пирамиди се отнасят както квадратите на височините им.

Височината на пресечената пирамида по условие е $14\,cm$, следователно – на «малката» пирамида е $(H-14)\,cm$. По условие:

$$\frac{H^2}{(H-14)^2} = \frac{150}{54} \Leftrightarrow \frac{H}{H-14} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow H = 35\,cm.$$

Задача 15.



Нека O е ортогоналната проекция на върха D върху равнината на $\triangle ABC$.

Построява се равнина през околния ръб CD, перпендикулярна на AB. Сечението ѝ с пирамидата е $\triangle NCD$. За да се докаже, че равнината (NCD) е перпендикулярна на AB, трябва да се докаже, че съществуват две пресичащи се прави в тази равнина, перпендикулярни на AB:

1. $DO \perp (ABC) \Rightarrow DO \perp AB$;
2. $ON = np_{(ABC)} DN$ и $ON \perp AB \Rightarrow DN \perp AB$ по Теоремата за трите перпендикуляра;
3. $DO \cap DN = D$ и $DN \in (NCD)$, и $DO \in (NCD)$.

От това следва, че AB е перпендикулярна на всяка права от равнината (NCD), т.е. $NM \perp AB$ и $CD \perp AB$.

NM е ос-отсечка на двата кръстосани ръба на пирамидата.

От $\triangle NCD$ – равнобедрен, следва че NM е височина, ъглополовяща и медиана, т.е. $NM \perp CD$ и $CM = MD = 6$.

От $\triangle NBC$ по Теорема на Питагор:

$$NC = \sqrt{BC^2 - NB^2} = \sqrt{49 - 4} = 3\sqrt{5}.$$

От $\triangle NCD$ – равнобедрен, следва че $ND = NC = 3\sqrt{5}$.

От $\triangle NCM$ по Теорема на Питагор:

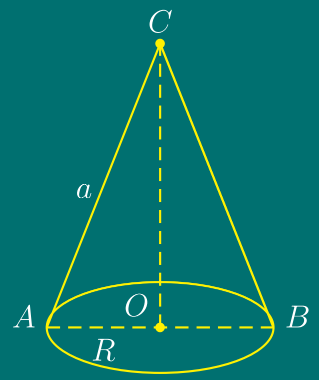
$$NM = \sqrt{NC^2 - MC^2} = \sqrt{45 - 36} = 3.$$

$$S_{\triangle NCD} = \frac{DC \cdot NM}{2} = \frac{NC \cdot DO}{2} \Leftrightarrow \frac{12 \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot DO}{2} \Leftrightarrow H = DO = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$B = S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CN}{2} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{5}\, cm^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 24\, cm^3.$$

Задача 16.



Нека $AC = BC = a$ и $AB = 2R$. Повърхнината на конуса е

$$S_c = \pi R\,(R + a)\,.$$

По условие

$$\left|\begin{array}{l} P_{\triangle} = 30 \\ S_c = 60\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 2(R+a) = 30 \\ \pi R(R+a) = 60\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} R+a = 15 \\ R(R+a) = 60 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} R+a = 15 \\ 15\,R = 60 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 11 \\ R = 4 \end{array}\right.$$

Следователно $AB = AC = 11\,cm$ и $AB = 2\,R = 8\,cm$.

ТЕМА 7

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 21.07.2003

Задача 1. Дадена е функцията

$$y = f(x) = (2-a)x^3 + (a-4)x^2 + bx + c,$$

където a, b и c са реални параметри:

а) Да се намерят стойностите на a, b и c, ако a и c са съответно първият член a_1 и частното q на геометричната прогресия, за която

$$\left| \begin{array}{l} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{array} \right. ,$$

а b е границата

$$b = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1} .$$

б) Ако $a = 1$, $b = 0$ и $c = 2$, да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)$ в интервала $[0, 1]$.

Задача 2. Даден е равнобедрен остроъгълен триъгълник ABC, в който пресечната точка O на височините му разделя височината към основата на части p и q, считано от върха C.

а) Да се намери лицето на триъгълника ABC;

б) Да се намери $\operatorname{tg} \gamma$, където $\gamma = \angle ACB$;

в) Да се намери ъгълът γ , ако $p = 6\,cm$ и $q = 3\,cm$.

Задача 3. В правилна четириъгълна пирамида, ъгълът между околна стена и равнината на основата е α, а дължината на основния ръб е b. През основен ръб е прекарана равнина ρ, сключваща с равнината на основата ъгъл β $(\beta < \alpha)$.

а) Да се намери обемът и лицето на повърхнината на пирамидата;

б) Да се намери лицето на сечението на равнината ρ с пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 21.07.2003

Задача 1.

а). По условие $a_1 = a$, $q = c$. От свойствата на аритметична прогресия

$$a_2 = aq\ ,\ a_3 = aq^2\ ,\ a_4 = aq^3\ ,\ a_5 = aq^4\ ,\ a_6 = aq^5.$$

След заместване в дадената система, се получава система с две неизвестни

$$\left|\begin{array}{l} aq + aq^4 - aq^3 = 10 \\ aq^2 + aq^5 - aq^4 = 20 \end{array}\right. ,$$

Разделя се второто уравнение на първото

$$\frac{aq^2(1 + q^3 - q^2)}{aq(1 + q^3 - q^2)} = \frac{20}{10} \Leftrightarrow q = c = 2,$$

след което от първото уравнение се определя a:

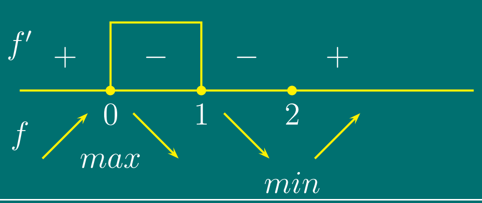
$$2a(1 + 8 - 4) = 10 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$b = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = 0 \Rightarrow b = 0$$

б). При $a = 1$, $b = 0$ и $c = 2$, функцията е $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Намира се първата производна $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, приравнява се на нула:

$$3x(x-2) = 0\ \Rightarrow\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = 2$$

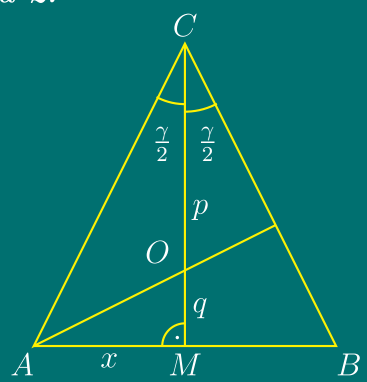


Изследва се знакът на първата производна, определят се локалните екстремуми и стойностите на функцията в краищата на интервала $[0, 1]$.

$$f_{max}(0) = 2, \quad f_{min}(2) = -2, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$$

$$f_{\text{нгс}} = f_{max}(0) = 2 \quad , \quad f_{\text{нмс}} = f(1) = 0$$

Задача 2.



а). Нека $AM = MB = x$.

От подобието на триъгълниците $\triangle AMO \sim \triangle CMA \Rightarrow$

$$\frac{x}{q} = \frac{p+q}{x} \Rightarrow x = \sqrt{q(p+q)}$$

Следователно

$$S = CM \cdot AM = (p+q)\sqrt{q(p+q)}.$$

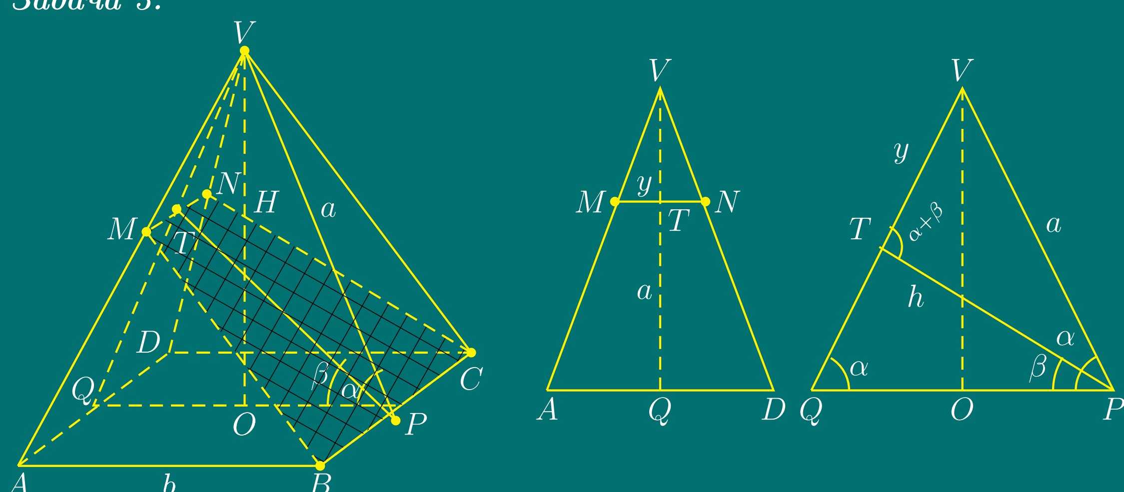
б). Тъй като $\triangle ABC$ е равнобедрен, то CM е ъглополовяща, медиана и височина. Следователно $\angle ACM = \angle MCB = \frac{\gamma}{2}$. От $\triangle AMC$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{x}{p+q} = \sqrt{\frac{q}{p+q}} \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{2}{p}\sqrt{q(p+q)}$$

в). $p = 6$, $q = 3$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{6}\sqrt{3\cdot(3+6)} = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

Задача 3.



а). Основата на пирамидата е квадрат с лице $B = b^2$. От $\triangle OPV$

$$H = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow V = \frac{1}{6}b^3\operatorname{tg}\alpha$$

Апотемата a на пирамидата се намира от $\triangle OPV$:

$$a = VP = \frac{b}{2\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$S_{\triangle BCV} = \frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2\cos\alpha} = \frac{b^2}{4\cos\alpha}$$

$$S_1 = S + B = 4\cdot S_{\triangle BCV} + b^2 = b^2\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

б). Нека h е височината на трапеца $BCNM$, $y = TV$.

Триъгълник $\triangle QPV$ е равнобедрен, следователно $\angle PQV = \alpha$. По условие $\angle QPT = \beta$.

Ъгъл $\angle VTP$ е външен за $\triangle QPT$, следователно $\angle VTP = \alpha + \beta$. От $\triangle QPT$ по Синусова Теорема:

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\left(180^o - (\alpha+\beta)\right)} \Rightarrow h = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

От $\triangle TVP$ по Синусова Теорема:

$$\frac{y}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow \frac{y}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{b}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{b\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

От $\triangle MNV \sim \triangle ADV$

$$\frac{MN}{b} = \frac{y}{a} \Rightarrow MN = \frac{b\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$S_{BCNM} = \frac{MN+b}{2}\cdot h = \frac{\frac{b\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + b}{2}\cdot\frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{b\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]\cdot b\sin\alpha}{2\sin^2(\alpha+\beta)} = b^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

ТЕМА 8

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 22.07.2003

Задача 1. Да се реши неравенството

$$x - \frac{1}{3}\left(\frac{3-2x}{4} - 1\right) \leq \frac{x}{2} - \frac{1-5x}{4}$$

и да се провери дали числото

$$a = \frac{(2^2)^3 \cdot 6^4}{(-3)^3 \cdot 4^5}$$

е решение на това неравенство?

Задача 2. Даден е изразът

$$A = \left(\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x^2-4}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x+3}{x-2} + \frac{3}{9-x^2}\right) : \frac{x^2+6x}{x-3}$$

а) Да се определи множеството на допустимите стойности на x;

б) Да се опрости изразът.

Задача 3. За кои стойности на x стойностите на функцията

$$f(x) = \frac{5}{x-1}$$

са по-големи от съответните стойности на функцията

$$f_1(x) = 4 + \frac{3}{x+1}$$

Задача 4. Корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ са такива, че

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,75.$$

Определете a.

Да се решат уравненията и системата:

Задача 5.

$$5^{\sqrt{3x-2}+1} = 125^{\sqrt{x-1}}$$

Задача 6.

$$\log_2(6x+2) - \log_2(x-1) = 3.$$

Задача 7.

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$$

Задача 8.

$$\left| \begin{array}{l} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{array} \right.$$

Задача 9. Да се намери границата

$$l = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

Задача 10. Лицето на равнобедрен трапец, описан около окръжност, е равно на $50\,cm^2$. Намерете бедрото на този трапец, ако се знае, че ъгълът при основата на трапеца е 30^o.

Задача 11. Основата на равнобедрен триъгълник е $12\,cm$, а бедрото му е $10\,cm$. Да се намери радиусът на вписаната в триъгълника окръжност.

Задача 12. Да се намери стойността на израза

$$A = \frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{3\cos\alpha - \sin\alpha}\ ,$$

ако $\mathrm{cotg}\alpha = -2$.

Задача 13. Дадени са две концентрични окръжности. Хорда в голямата окръжност, която се допира до малката окръжност, е $14\,cm$. Да се намери лицето на венеца.

Задача 14. Триъгълник със страни $12\,cm$, $10\,cm$ и $10\,cm$ служи за основа на пирамида, околните стени на която образуват с равнината на основата двустенни ъгли, равни на 60^o. Да се намери височината на пирамидата.

Задача 15. Намерете обема на правоъгълен паралелепипед с диагонал $4\,cm$, ако този диагонал сключва с една от околните стени ъгъл 30^o, а с другата околна стена – ъгъл 45^o.

Задача 16. Основата на пирамида е равнобедрен триъгълник с основа $6\,cm$ и лице $27\,cm^2$. Околните ръбове са равни на $13\,cm$. Намерете височината на пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев» 22.07.2003

Задача 1. Даденото неравенство е еквивалентно на

$$x - \frac{1}{4} + \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \le \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5x}{4} \Leftrightarrow 7x \ge 4 \Rightarrow x \ge \frac{4}{7} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{7}, +\infty\right)$$

$$a = -\frac{2^6 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{3^3 \cdot 2^{10}} = -3 \notin \left[\frac{4}{7}, +\infty\right)$$

Задача 2. а). Множеството от допустими стойности на x е:

$$\text{ДС:} \quad x \in \mathcal{R} \setminus \{-6, \pm 3, 0, 2\}$$

б).

$$A = \left(\frac{2x-1}{x-3} - \frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{(x+3)^2(x-2)} - \frac{3}{(x-3)(x+3)}\right) \cdot \frac{x-3}{x(x+6)} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x+3) - (x+2)(x-3) - 3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x-3}{x(x+6)} = \frac{x^2+6x}{x+3} \cdot \frac{1}{x(x+6)} = \frac{1}{x+3}$$

Задача 3.

$$\frac{5}{x-1} > 4 + \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{-2(2x^2-x-6)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)} < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (1, 2)$$

Задача 4. По условие

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}.$$

От Формулите на Виет:

$$x_1 + x_2 = 3a\ ,\ x_1\, x_2 = a^2,$$

откъдето

$$(3a)^2 - 2a^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 7a^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow a_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\ .$$

Задача 5. Допустими стойности за променливата са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС}: \quad \left| \begin{array}{l} 3x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$$

От свойствата на показателната функция

$$5^{\sqrt{3x-2}+1} = 5^{3\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+1 = 3\sqrt{x-1}$$

Повдигат се двете страни на втора степен:

$$3x-2+2\sqrt{3x-2}+1 = 9(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 3x-4.$$

Тъй като лявата страна на полученото ирационално уравнение е неотрицателна, дясната страна също трябва да е неотрицателна:

$$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \text{ДС: } x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right]$$

Отново се повдигат на втора степен двете страни на полученото уравнение:

$$3x-2 = 9x^2-24x+16 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \notin \text{ДС},\ \ x_2 = 2 \in \text{ДС}$$

Задача 6. Допустимите стойности за променливата, удовлетворяваща логаритмичното уравнение

$$\log_2(6x+2) - \log_2(x-1) = 3 \cdot \log_2 2$$

са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС:} \quad \left| \begin{array}{l} 6x+2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x > -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

От свойствата на логаритмите

$$\log_2 \frac{6x+2}{x-1} = \log_2 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6x+2}{x-1} = 8 \Leftrightarrow x = 5 \in \text{ДС}.$$

Задача 7. Полага се $\sin x = y$ с допустими стойности на новата променлива $D: \ -1 < y < 1$. Получава се квадратно уравнение

$$2y^2 - 7y + 3 = 0$$

с корени $y_1 = 3 \notin D$, $y_2 = \frac{1}{2} \in D$.

От полагането, $\sin x = \frac{1}{2}$ и се получават решенията

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

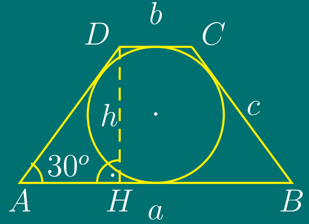
Задача 8. От свойствата на показателната функция, дадената система е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Задача 9.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}$$

Задача 10.



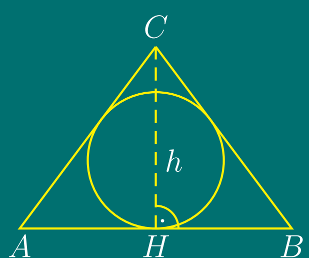
Трапецът е описан около окръжност, следователно $a + b = 2c$. От формулата за лице на трапец

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2c}{2} \cdot 2r = 50 \Rightarrow c \cdot r = 25$$

От $\triangle AHD$ - правоъгълен и $\angle DAH = 30^o$ следва, че $h = \frac{c}{2}$. Но $h = 2r \Rightarrow r = \frac{c}{4}$. Тогава

$$c \cdot r = 25 \Leftrightarrow \frac{c^2}{4} = 25 \Leftrightarrow c^2 = 100 \Leftrightarrow c = 10$$

Задача 11.



$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 6h$. От $\triangle HBC$,

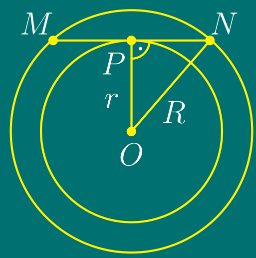
$$h = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

откъдето $S = 48$. От друга страна $S = pr$, $p = (12 + 10 + 10)/2 = 16$, откъдето $48 = 16r \Leftrightarrow r = 3$.

Задача 12.

$$A = \frac{4 - 5 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{3 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1} = \frac{4 - 5\,\mathrm{cotg}\alpha}{3\,\mathrm{cotg}\alpha - 1} = \frac{4 - 5 \cdot (-2)}{3 \cdot (-2) - 1} = -2$$

Задача 13.



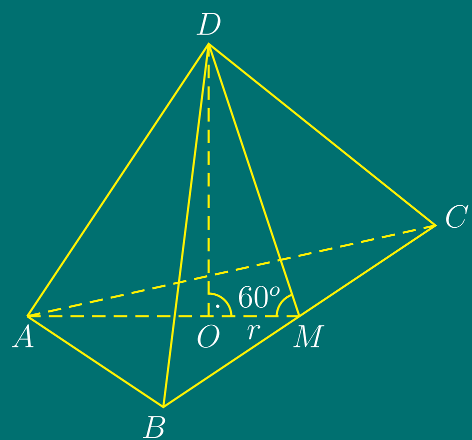
Лицето на венеца е

$$S_v = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \left(R^2 - r^2\right) = \pi \cdot PN^2 \,.$$

Хордата MN се допира до малката окръжност, следователно тя е перпендикулярна на радиуса, построен в точката на допиране P.

Следователно, $OP \perp MN$ и от свойството на диаметър, перпендикулярен на хорда, P е среда на $MN \Rightarrow PN = 7 \Rightarrow S_v = \pi \cdot 7^2 = 49\pi\, cm^2$.

Задача 14.



Върхът на пирамидата се проектира в центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Нека $AB = AC = 10, BC = 12$. Лицето на $\triangle ABC$ е:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 6h.$$

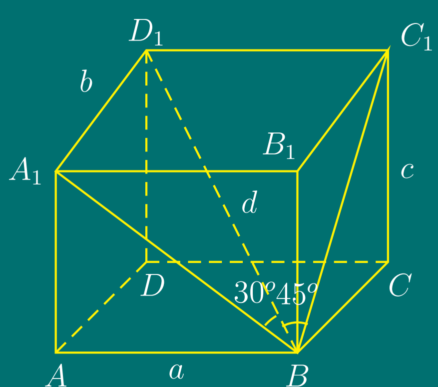
От $\triangle ABM$,

$$h = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

откъдето $S = 48$.

От друга страна $S = pr$, $p = (12 + 10 + 10)/2 = 16$, откъдето $48 = 16r \Leftrightarrow r = 3$. От $\triangle OMD$, $H = r \cdot \operatorname{tg} 60^o = 3\sqrt{3}$.

Задача 15.



От $A_1D_1 \perp (ABB_1)$ и $D_1C_1 \perp (BCC_1)$ следва, че

$$A_1 = np_{(ABB_1)} D_1 \,, \; C_1 = np_{(BCC_1)} D_1.$$

Следователно,

$$\angle A_1BD_1 = 30^o \,, \; \angle C_1BD_1 = 45^o,$$

$$\angle D_1A_1B = \angle D_1C_1B = 90^o.$$

От $\triangle C_1BD_1$ – равнобедрен правоъгълен, следва

$$a = C_1D_1 = d\,\sin 45^o = 2\sqrt{2} \quad , \quad BC_1 = C_1D_1 = 2\sqrt{2}.$$

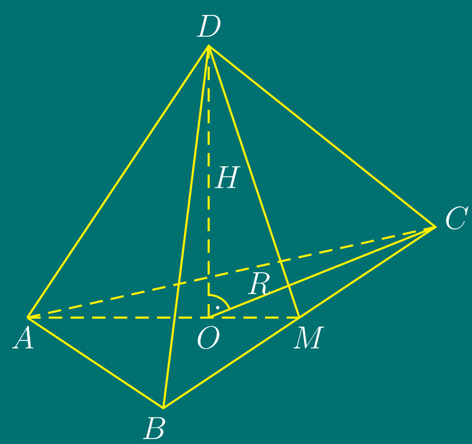
От $\triangle A_1BD_1 \Rightarrow$

$$b = A_1D_1 = \frac{d}{2} = 2$$

От $\triangle BB_1C_1 \Rightarrow$

$$c = BB_1 = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{8-4} = 2 \Rightarrow V = a\,b\,c = 8\sqrt{2}\,cm^3.$$

Задача 16.



Околните ръбове са равни, следователно проекциите им върху равнината на основата също са равни, т.е. $OA = OB = OC \Rightarrow O$ е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Нека $AB = AC$, AM - височина, ъглополовяща и медиана в $\triangle ABC$.

$$S = \frac{BC \cdot AM}{2} = 3 \cdot AM = 27 \Rightarrow AM = 9$$

От $\triangle ABM \Rightarrow$

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}.$$

От друга страна, от формулата за лице на триъгълник чрез радиуса на описаната окръжност:

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow 27 = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4R} \Rightarrow R = 5.$$

От $\triangle OCD \Rightarrow$

$$H = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,cm.$$

ТЕМА 9

Тема от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 05.06.2004

Задача 1. Дадено е уравнението

$$x^2 - 2(a-3)x + 4a = 0.$$

Ако x_1 и x_2 са корените на това уравнение:

(а) да се изрази като функция на a сборът

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\ ;$$

(б) да се намерят стойностите на a, за които $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

Задача 2. Да се решат уравненията

(а) $\quad 3\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^2 + 1 = 0;$

(б) $\quad \sin x - \sin 3x + \sin 5x = \cos x - \cos 3x + \cos 5x.$

Задача 3. Даден е правоъгълният триъгълник ABC, в който височината CD към хипотенузата има дължина 12 см, а радиусът на вписаната в триъгълника окръжност има дължина 5 см. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 4. В правилна четириъгълна пирамида дължината на основния ръб е a. Ъгълът между околна стена и основата е α. Да се намери обема на кълбото, което е вписано в пирамидата.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 05.06.2004

Задача 1. (а) От формулите на Виет:

$$x_1 + x_2 = 2(a-3)\ , \quad x_1 x_2 = 4a,$$

откъдето

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{4(a-3)^2}{4a} - 2 = \frac{1}{a}\left(a^2 - 8a + 9\right).$$

(б)

$$\left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a-3)^2 - 4a \geq 0 \\ a - 3 < 0 \\ a > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2 - 10a + 9 \geq 0 \\ 0 < a < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a \leq 1 \text{ или } a \geq 9 \\ 0 < a < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$$

Задача 2. (а) Нека $y = \log_9 x$. От свойствата на логаритмите:

$$\log_{\frac{x}{9}} x = \frac{\log_9 x}{\log_9 \frac{x}{9}} = \frac{y}{y-1}\ ,$$

$$\log_{\frac{9}{x}} x^2 = 2\log_{\frac{9}{x}} x = 2\frac{\log_9 x}{\log_9 \frac{9}{x}} = \frac{2y}{1-y}\ ,$$

откъдето

$$\frac{3y}{y-1} + \frac{2y}{1-y} + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y-1} = -1 \ \Leftrightarrow y = -y + 1 \ \Leftrightarrow 2y = 1 \ \Leftrightarrow \ y = \frac{1}{2}.$$

Тогава

$$\log_9 x = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ x = 9^{1/2} = 3.$$

Следователно $x = 3$.

(б) Преработва се уравнението

$$2\sin 3x\cos 2x - \sin 3x = 2\cos 3x \cos 2x - \cos 3x \ \Leftrightarrow$$

$$(2\cos 2x - 1)(\sin 3x - \cos 3x) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(2\cos 2x - 1)\left[\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)\right] = 0,$$

откъдето

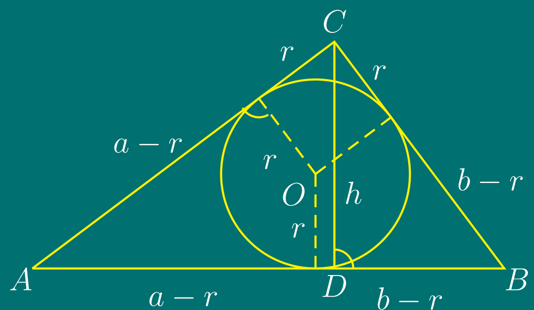
$$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

или

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Задача 3. Нека a и b са катетите на триъгълника, $r = 5$ е радиусът на вписаната окръжност, $h = CD = 12$ е височината към AB.



Страната AB е равна на $a + b - 2r$.

От формулата за лице на триъгълник:

$$h(a + b - 2r) = ab.$$

От Теоремата на Питагор $(a + b - 2r)^2 = a^2 + b^2$.

Следователно a и b удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} 12(a + b - 10) = ab, \\ (a + b - 10)^2 = a^2 + b^2. \end{array} \right.$$

От второто уравнение

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 20(a + b) + 100 \ \Leftrightarrow \ 10(a + b) = ab + 50.$$

Тогава

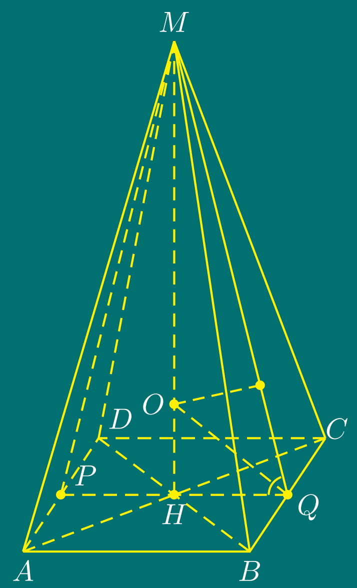
$$\left| \begin{array}{l} ab = 12(a + b - 10) \\ ab = 10(a + b) - 50, \end{array} \right.$$

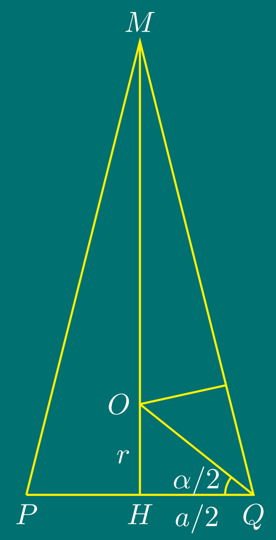
откъдето $a + b = 35$, $ab = 300$.

Ако $a > b$, то a и b са корени на уравнението $x^2 - 35x + 300 = 0$, откъдето $a = 20$, $b = 15$, а хипотенузата $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 25$.

Окончателно, страните на триъгълника са с дължини: 15, 20, 25.

Задача 4.





Нека $ABCDM$ е пирамидата, $MH \perp (ABC)$, $HQ \perp BC$, $\angle MQH = \alpha$, $HP \perp AD$, $PQ = a$.

В триъгълник $\triangle PQM$, OQ е ъглополовяща, $\angle OQH = \frac{\alpha}{2}$, $OH = r$ е радиус на вписаното кълбо.

От $\triangle OHQ$:

$$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ .$$

Тогава обемът V на вписаното кълбо е

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow V = \frac{\pi}{6}\,a^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\ .$$

ТЕМА 10

Тема от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 06.06.2004

Задача 1. Еквивалентни ли са уравненията

$$\sqrt{x+2} = x+1 \quad \text{и} \quad x+2 = (x+1)^2 \ ?$$

Задача 2. Да се реши по кратък начин уравнението

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{2-x} + \sqrt{1-x} \ .$$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$\mid x \mid + x^3 = 0 \ .$$

Задача 4. Да се реши неравенството

$$\frac{(x+3)(x-8)}{x+4} \geq 0 \ .$$

Задача 5. Да се реши уравнението

$$4\sqrt[4]{2^{x+1}} - \sqrt[3]{4^6} = 0 \ .$$

Задача 6. Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{array} \right. ,$$

Задача 7. Пресметнете стойността на израза

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + cotg\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - cotg\alpha\right) .$$

Задача 8. Да се реши уравнението

$$\sin 3x + 4\sin^3 x = 2\sin x .$$

Задача 9. Да се реши уравнението

$$\log_2(x^2 - x) = \frac{1}{2}\log_2 4 .$$

Задача 10. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{(2x+1)(5x-3)} .$$

Задача 11. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $y = x^4 - 2x^2$ за $x \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$.

Задача 12. Да се намери радиусът на вписаната окръжност в равнобедрен триъгълник с основа 12 и бедро 10.

Задача 13. Пресметнете лицето на ромб с диагонал 30 и височина 24.

Задача 14. Да се намери лицето на трапец с основи a, b $(a > b)$ и ъгли при голямата основа 30^o и 45^o.

Задача 15. Да се намери околният ръб на правилна триъгълна пирамида с основен ръб a и обем $V = a^3$.

Задача 16. Дадена е правилна четириъгълна призма с обем $V = 8$. Да се докаже, че най-малката стойност на пълната ѝ повърхнина S_1 е 24.

Решения

Кратки решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 06.06.2004

Задача 1. Не, тъй като Допустими стойности за x за първото уравнение е $x \in [-1, +\infty)$, а за второто – $x \in [-2, +\infty)$.

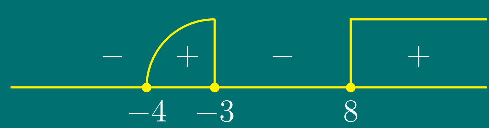
Задача 2. Няма решение. Радикалът отляво е определен за $x \in [3, +\infty)$, а първият отдясно – за $x \in (-\infty, 2]$.

Задача 3. Ако $x \geq 0$, уравнението е еквивалентно на $x + x^3 = 0$, откъдето $x(1 + x^2) = 0$ и $x_1 = 0$. Ако $x < 0$, то уравнението има вида $-x + x^3 = 0$ и $x(x^2 - 1) = 0$ с решения $x_2 = x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$; от тях само $x_4 = -1$ отговаря на условието $x < 0$. Решенията са $x = 0$ и $x = -1$.

Задача 4. Неравенството е еквивалентно на системата:

$$\left| \begin{array}{l} (x+3)(x-8)(x+4) \geq 0 \\ x \neq -4 \end{array} \right.$$

По метода на интервалите:



откъдето се получават решенията на системата $x \in (-4, -3] \cup [8, +\infty)$.

Задача 5.

$$4 \cdot 2^{\frac{x+1}{4}} - 4^2 = 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{x+1}{4}} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{4} = 2.$$

Отговор: $x = 7$.

Задача 6. От второто уравнение се изразява $y = 3/x$ и се замества в първото уравнение. Получава се биквадратно уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Полага се $x^2 = t$, $t \geq 0$, което води до квадратно уравнение $t^2 - 8t - 9 = 0$ с корени $t_1 = 9$, $t_2 = -1$.

Вторият корен не отговаря на условието $t \geq 0$. Следователно

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \quad , \quad y = \frac{3}{x} = \pm 1.$$

Отговор: $(3,1)$, $(-3,-1)$.

Задача 7.

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1$$

Задача 8. След прилагане на формулата $\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha$, се получава

$$3\sin x = 2\sin x \Leftrightarrow \sin x = 0.$$

Отговор: $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Задача 9. Допустими стойности на x са $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Уравнението се преобразува в

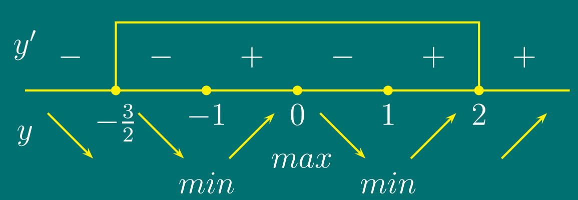
$$\log_2(x^2-x) = \log_2 4^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x^2-x) = \log_2 2,$$

което при $a = 2 > 1$ е еквивалентно на $x^2 - x - 2 = 0$. Квадратното уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ има корени $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Проверката показва, че и двата корена удовлетворяват уравнението.

Задача 10.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{(2x+1)(5x-3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(5-\frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2\cdot 5} = \frac{3}{10}.$$

Задача 11. Първата производна е $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$. След като се реши уравнението $y' = 0$, се получават критични точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$. Изследва се знакът на първата производна:

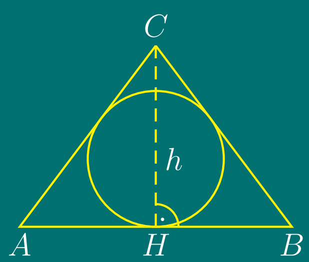


$$y_{max}(0) = 0, \quad y_{min}(-1) = y_{min}(1) = -1, \quad y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16}, \quad y(2) = 8$$

$$y_{\text{нгс}} = \max\left\{y\left(-\frac{3}{2}\right)\ ,\ y_{max}(0)\ ,\ y(2)\right\} = 8$$

$$y_{\text{нмс}} = \min\left\{y_{min}(-1)\ ,\ y_{min}(1)\right\} = -1$$

Задача 12.

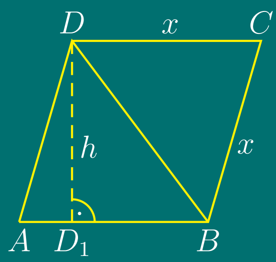


$S = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = 6h$. От $\triangle HBC$,

$$h = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

откъдето $S = 48$. От друга страна $S = pr$, $p = (12 + 10 + 10)/2 = 16$, откъдето $48 = 16r \Leftrightarrow r = 3$.

Задача 13.



От $\triangle D_1BD$,

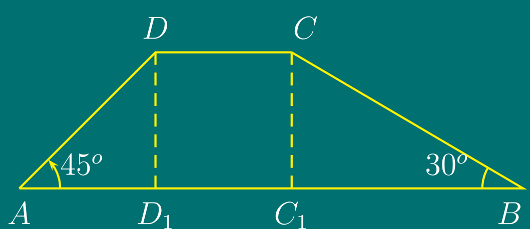
$$D_1B = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{54 \cdot 6} = 18.$$

Ако страната на $ABCD$ е x, то $AD_1 = x - 18$ и по Питагоровата теорема за $\triangle AD_1D \Rightarrow$

$$x^2 = (x - 18)^2 + 24^2 \Leftrightarrow 36x = 900 \Leftrightarrow x = 25.$$

Лицето на ромба е $S = x \cdot h = 25 \cdot 24 = 600$.

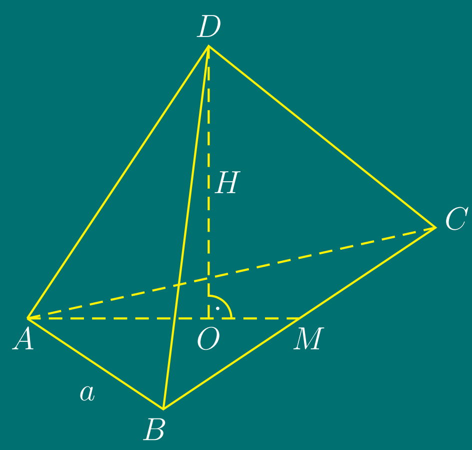
Задача 14.



Нека $AB = a$, $CD = b$, $\angle BAD = 45^o$, $\angle ABC = 30^o$, $AD_1 = CC_1 = h$. От $\triangle C_1BC$: $C_1B = CC_1 \operatorname{cotg} 30^o = h\sqrt{3}$ и $AD_1 + D_1C_1 + C_1B = a \Rightarrow h + b + h\sqrt{3} = a$, откъдето $h = \frac{a-b}{1+\sqrt{3}}$. За лицето на трапеца се получава:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a^2 - b^2}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{(a^2 - b^2)(\sqrt{3} - 1)}{4}\ .$$

Задача 15.



Пирамидата е правилна триъгълна, следователно основата ѝ е равностранен триъгълник. Нека основният ръб е a, а височината е H.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}\ ,\ AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Обемът е $V = \frac{1}{3}B\,H$, $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и следователно $4\sqrt{3}V = a^2H$, което заедно с $V = a^3$ дава $H = 4\sqrt{3}a$.

От $\triangle AOD$ за околния ръб b по Питагорова теорема се получава

$$b = \sqrt{(4\sqrt{3}a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{145}{3}}.$$

Задача 16. Нека x е ръбът на призмата, а y е височината. Тогава $V = x^2y = 8$. Пълната повърхнина е $S_1 = 2x^2 + 4xy$. От формулата за обема се изразява $y = \frac{8}{x^2}$ и след заместване във формулата за пълната повърхнина се получава функцията $S_1(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}$, която се изследва при $x > 0$.

$$S_1'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = \frac{4(x^3-8)}{x^2}$$

$$\frac{4(x^3-8)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Проверява се, че функцията намалява при $x \in (0,2)$ и расте за $x \in (2,\infty)$. Следователно

$$S_{1,\text{нмс}} = S_1(2) = 2\cdot 2^2 + \frac{32}{2} = 24.$$

ТЕМА 11

Тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 03.07.2004

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\frac{3x}{3x+2} = \frac{x-2}{x-1}.$$

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$x - \sqrt{x+7} = 5.$$

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$x + 2 + \frac{4}{x-3} < 0.$$

Задача 4. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3xy - 4y = 2 \\ x + xy + 3y = 1 \end{array} \right.$$

Задача 5. Да се реши показателното уравнение:

$$2^{x+1} - 2^x = 2.$$

Задача 6. Да се реши логаритмичното уравнение:

$$\lg\left(x^2 - 8x + 4\right) = 2\lg(x-6).$$

Задача 7. Да се опрости изразът:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}.$$

Задача 8.Да се намери границата:

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 4x - 5}.$$

Задача 9. Да се намери първият член a_1 и разликата d на аритметична прогресия, за която:

$$\left| \begin{array}{l} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{array} \right.$$

Задача 10. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $y = x^3 - 3x^2 + 3$ за $x \in [-1, 1]$.

Задача 11. Основите на равнобедрен трапец са $40\,cm$ и $28\,cm$, а бедрото му е $12\,cm$. Да се намерят ъглите на трапеца.

Задача 12. В окръжност с радиус R е вписан правоъгълник, ъгълът между диагоналите на който е α. Да се намери периметърът на правоъгълника.

Задача 13. Върху основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е взета точка D така, че ъгъл BDC е 60^o, $AD = 3\,cm$, $BD = 8\,cm$. Да се намери страната AC.

Задача 14. От върха C на квадрат $ABCD$ е издигнат перпендикуляр CM към равнината $ABCD$, като $CM = AB$. Да се намерят ъглите, които сключват отсечките MB и MA с равнината $ABCD$.

Задача 15. Височината на правилна четириъгълна пирамида е $1\,cm$, а основният ѝ ръб е $\sqrt{2}\,cm$. Да се намери лицето на диагоналното сечение.

Задача 16. Отношението на лицата на основите на пресечен конус е 1:36. Височината му е $21\,cm$, а диагоналът на осното сечение е $35\,cm$. Намерете обема на пресечения конус.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 03.07.2004

Задача 1. Тъй като знаменателите не бива да се анулират, допустимите стойности на променливата x са

$$\text{ДС}: \quad x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)\,.$$

След освобождаване от знаменател и разкриване на скоби, се получават следните еквивалентни уравнения:

$$3x(x-1) = (3x+2)(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3x = 3x^2 + 2x - 6x - 4,$$

откъдето $\boxed{x = -4 \in \text{ДС}}$.

Задача 2. Даденото уравнение може да се запише във вида:

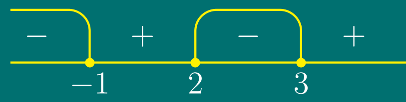
$$\sqrt{x+7} = x - 5. \tag{11.1}$$

Допустими стойности на променливата x са решенията на системата неравенства:

$$\text{ДС:} \quad \left|\begin{array}{l} x+7 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [5, \infty)$$

След повдигане на втора степен на двете страни на уравнението (11.1), се получава квадратно уравнение $x^2 - 11x + 18 = 0$ с корени $x_1 = 9 \in \text{ДС}$ и $x_2 = 2 \notin \text{ДС}$. Окончателно $\boxed{x = 9}$.

Задача 3. Допустими стойности на променливата x са всички $x \neq 3$.



След привеждане на лявата страна на неравенството под общ знаменател се получава:

$$\frac{x^2-x-2}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-2)(x+1)(x-3)<0 \\ x-3\neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(2,3)$$

Задача 4. От второто уравнение се изразява променливата

$$y=\frac{1-x}{x+3}$$

и след заместване в първото уравнение и преобразуване, се получава квадратно уравнение $x^2+x-2=0$ с корени $x_1=1$, $x_2=-2$. От тук:

$$y_1=\frac{1-1}{1+3}=0 \quad , \quad y_2=\frac{1+2}{-2+3}=3.$$

Окончателно решенията на системата са: $\boxed{(-2,3),\ (1,0)}$.

Задача 5. От свойствата на показателната функция имаме $2^x\cdot 2-2^x=2$. Полага се $2^x=y$, $y>0$ откъдето

$$2y-y-2=0 \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow 2^x=2 \Leftrightarrow x=1$$

Отговор: $\boxed{x=1}$.

Задача 6. Допустими стойности на променливата са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС:} \quad \left| \begin{array}{l} x^2-8x+4>0 \\ x-6>0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x\in\left(4+2\sqrt{3}\ ,\ +\infty\right)$$

След антилогаритмуване на уравнението

$$\lg\left(x^2-8x+4\right)=\lg(x-6)^2,$$

се получава уравнение $x^2-8x+4=(x-6)^2$ с решение $\boxed{x=8\in\text{ДС}}$.

Задача 7.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2.$$

Задача 8.

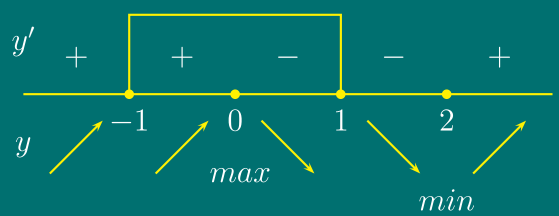
$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+8x+15}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(x+3)}{(x+5)(x-1)}=\frac{1}{3}.$$

Задача 9. От формулата за общия член на аритметична прогресия $a_n = a_1 + (n-1)d$, системата се преобразува в еквивалентна система:

$$\left|\begin{array}{l} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 + d + a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10 \\ a_1 + a_1 + 5d = 17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 + 3d = 10 \\ 2a_1 + 5d = 17 \end{array}\right. .$$

От първото уравнение се изразява $a_1 = 10 - 3d$, замества се във второто и се получава $d = 3$. Окончателно $\boxed{a_1 = 1\ ,\ d = 3}$.

Задача 10. Първата производна е $y' = 3x^2 - 6x$. След като се реши уравнението $y' = 0$, се получават критични точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

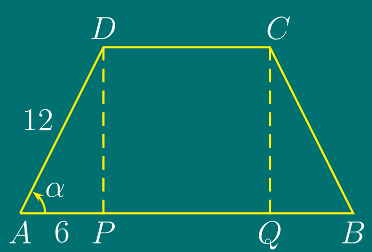


Изследва се знакът на първата производна, определят се локалните екстремуми и стойностите на функцията в краищата на интервала $[-1, 1]$.

$$y_{max}(0) = 3, \quad y_{min}(2) = -1, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$

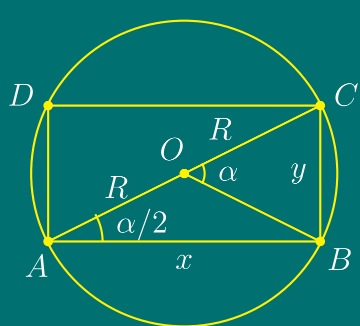
$$y_{\text{нгс}} = y_{max}(0) = 3 \quad , \quad y_{\text{нмс}} = \min\{y(-1)\ ,\ y(1)\} = -1$$

Задача 11.



Тъй като трапецът $ABCD$ е равнобедрен, то $AP = QB = 6\,cm$. От $\triangle APD$ - правоъгълен, $AP = \frac{1}{2}AD$, откъдето $\angle ADP = 30^o$ като ъгъл, лежащ срещу катет, равен на половината от хипотенузата. Оттук следва, че $\angle\alpha = 60^o$ и $\angle ADC = 180^o - \alpha = 120^o$

Задача 12.



Нека $AB = x$, $BC = y$, тогава

$$P = 2(x + y).$$

От $\angle COB$ - централен, следва че м.$\angle COB = \widehat{BC}$ и от $\angle CAB$ - вписан, следва м.$\angle CAB = \frac{1}{2}\widehat{BC}$, откъдето $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB = \alpha/2$.

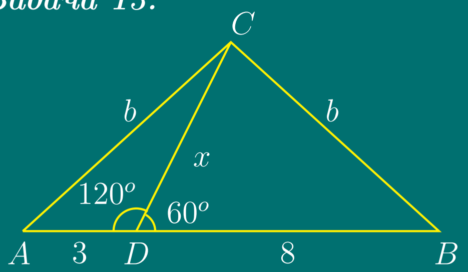
От $\triangle ABC$, $AC = 2R$, следва

$$\frac{x}{AC} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2R\cos\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \frac{y}{AC} = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Тогава

$$P = 2(x+y) = 2\left(2R\cos\frac{\alpha}{2} + 2R\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4R\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 13.



Нека $DC = x$ и $AC = BC = b$. От Косинусова Теорема, приложена за триъгълниците $\triangle DBC$ и $\triangle ADC$ имаме:

$$\begin{aligned} b^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot\cos 120^o \\ b^2 &= BD^2 + DC^2 - 2BD\cdot DC\cdot\cos 60^o \ , \end{aligned}$$

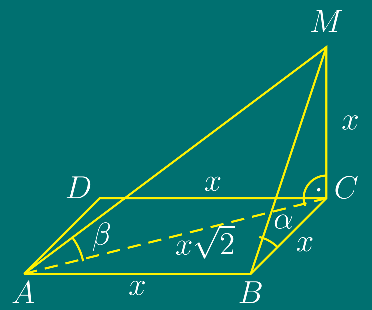
откъдето

$$\begin{aligned} b^2 &= 9 + x^2 + 3x \qquad (11.2) \\ b^2 &= 64 + x^2 - 8x \ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$9 + x^2 + 3x = 64 + x^2 - 8x \ \Leftrightarrow \ x = 5.$$

От (11.2)$\Rightarrow b^2 = 9 + 25 + 3\cdot 5 \ \Leftrightarrow \boxed{b = 7}$.

Задача 14.



По условие $MC\perp(ABC) \ \Rightarrow \ MC$ е перпендикулярна на всяка права от равнината (ABC). По дефиниция ъгъл между права и равнина е ъгълът между правата и нейната ортогонална проекция в равнината.

$$BC = \text{пр}_{(ABC)}BM \Rightarrow \ \angle\left(\widehat{MB\ ,\ (ABC)}\right) = \angle MBC = \alpha$$

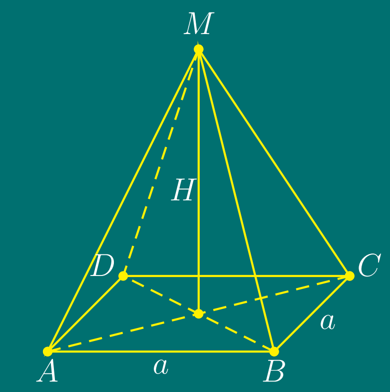
Триъгълникът $\triangle BCM$ е равнобедрен правоъгълен, следователно $\angle\alpha = 45^o$.

$$AC = \text{пр}_{(ABC)}AM \Rightarrow \angle\left(\widehat{MA\ ,\ (ABC)}\right) = \angle MAC = \beta$$

От $\triangle ACM$ имаме: $MC = x, AC = x\sqrt{2} \Rightarrow$

$$tg\beta = \frac{MC}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ \beta = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

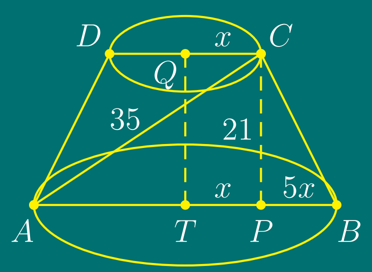
Задача 15.



Пирамидата е правилна четириъгълна, следователно основата ѝ е квадрат. Нека основният ръб е $a = \sqrt{2}$, а височината е H. Лицето на диагоналното сечение е $S_{ACM} = \frac{AC \cdot H}{2}$, $AC = a\sqrt{2} = 2$ и следователно

$$S_{ACM} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\,cm^2.$$

Задача 16.



Нека горната основа на пресечения конус има радиус $r_1 = x$, а долната - r_2. По условие

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi x^2}{\pi r_2^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{x}{r_2} = \frac{1}{6} \Rightarrow r_2 = 6x.$$

Осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец $ABCD$ с диагонал $AC = 35$, височина $CP = h = 21$, $AP = 7x$, $PB = 5x$. От $\triangle APC$ по Питагорова Теорема:

$$AP^2 + CP^2 = AC^2 \Leftrightarrow (7x)^2 + 21^2 = 35^2 \Leftrightarrow x = r_1 = 4\,cm \Rightarrow r_2 = 6x = 24\,cm.$$

Тогава обемът на пресечения конус е:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot 21\left(4^2 + 24^2 + 4 \cdot 24\right) = 7\pi \cdot 688 = 4816\pi\,cm^3.$$

ТЕМА 12

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 20.07.2004

Задача 1.

а) Да се реши уравнението

$$\frac{2x}{x+6}+\frac{x}{x-6}=\frac{9}{x^2-36};$$

б) Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right)>0.$$

Задача 2. Дадена е функцията

$$f(x)=(k+2)x^2+(3k+7)x+3k+5,$$

където k е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на параметъра k, за които уравнението $f(x)=0$ има два различни реални корена;

б) Да се намерят стойностите на параметъра k, за които числото 2 се намира между корените на уравнението;

в) При $k=1$ да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията в затворения интервал $[1,3]$.

Задача 3. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза c и остър ъгъл α.

а) Да се намери радиусът r на полукръга, който е вписан в триъгълника и центърът му O лежи върху хипотенузата AB;

б) Да се намери лицето на полукръга, ако $c = 4\,cm$ и $\alpha = 15^o$.

Задача 4. Основата на пирамида $ABCM$ е правоъгълния триъгълник ABC, в който ъгъл ACB е 90^o, дължината на единия катет е a и срещулежащия му ъгъл е α. Околните ръбове на пирамидата сключват с основата ѝ един и същ ъгъл β. Да се намери обемът на пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 20.07.2004

Задача 1. (а) Допустимите стойности на променливата x са всички $x \neq \pm 6$. След освобождаване от знаменател се получава еквивалентно уравнение

$$2x(x-6) + x(x+6) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \; x_1 = 3 \in \text{ДС}\; ; \; x_2 = -1 \in \text{ДС}$$

(б) Допустимите стойности на променливата са всички x, за които

$$\text{ДС}: \quad \frac{3x-1}{2x+3} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (3x-1)(2x+3) > 0 \\ 2x+3 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

От свойствата на логаритмите ($a = 1/2 < 1$), за уравнението се получава

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right) > \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{2x+3} < 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-4)(2x+3) < 0 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{array} \right. .$$

Тогава

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right) \cap \text{ДС} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 4\right)$$

Задача 2. (а) Уравнението има два различни реални корена за тези стойности на параметъра k, за които

$$\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ k \neq -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3k^2 + 2k - 9 < 0 \\ k \neq -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow k \in \left(\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}, -2\right) \cup \left(-2, \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right)$$

(б) Числото 2 е между корените на уравнението $f(x) = 0$, ако k удовлетворява системата

$$\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ (k+2)\cdot f(2) < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D > 0 \\ (k+2)[4(k+2) + 2(3k+7) + 3k + 5] < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ (k+2)(13k+27) > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} k \in \left(\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}, -2\right) \cup \left(-2, \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\right) \\ k \in \left(-\frac{27}{13}, -2\right) \end{array} \right.$$

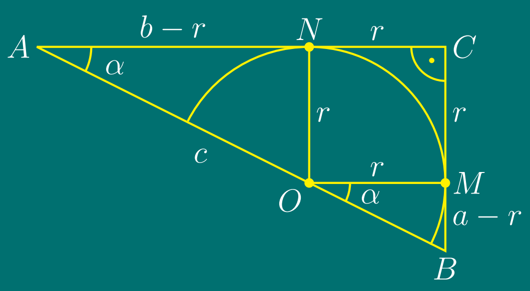
$$\Leftrightarrow k \in \left(-\frac{27}{13}, -2\right)$$

(в) При $k = 1$ функцията е $f(x) = 3x^2 + 10x + 8$. Търси се най-голямата и най-малката и́ стойност в интервала $[1, 3]$.

Първата производна $f'(x) = 6x + 10$ се анулира за $x = -\frac{5}{3} \notin [1, 3]$. Освен това, тя е строго положителна за $\forall x > -\frac{5}{3}$, следователно в интервала $[1, 3]$ функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща. От това следва, че $f(x)$ достига най-малката си стойност в левия край на интервала, а най-голямата – в десния:

$$f_{\text{НМС}} = f(1) = 21 \quad , \quad f_{\text{НГС}} = f(3) = 65.$$

Задача 3.



(а) По условие $a = BC = c\sin\alpha$, $b = AC = c\cos\alpha$. От $\triangle AON \sim \triangle OBM$ имаме

$$\frac{b-r}{r} = \frac{r}{a-r} \Leftrightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

$$r = \frac{c\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$$

(б) Тъй като $\alpha = 15^o$, $\sin 2\alpha = \sin 30^o = 1/2$ и $c = 4$, то

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{c^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} = \frac{\pi^2 c^2}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{1}{1+\sin 2\alpha} = \frac{\pi}{3}eg^2.$$

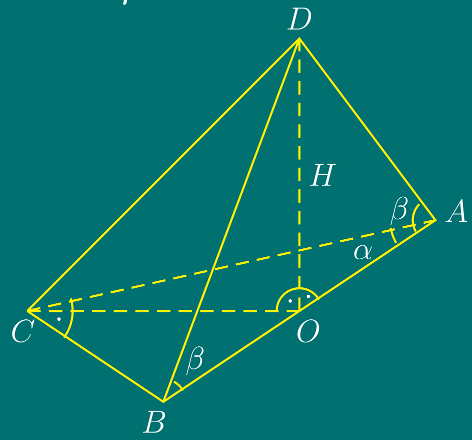
От тригонометричната формула

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos 30^o = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

за радиуса на полуокръжността се получава

$$r = \frac{c\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\sin 30^o}{\sin 15^o + \cos 15^o} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Задача 4.



Обемът на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

От еднаквостта на триъгълниците

$$\triangle AOM \cong \triangle BOM \cong \triangle COM$$

следва, че O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

От правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha \Rightarrow b = c\cos\alpha = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

За лицето на основата на пирамидата имаме

$$B = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

От правоъгълния триъгълник $\triangle AOM$

$$\frac{H}{\frac{c}{2}} = \mathrm{tg}\beta \Leftrightarrow H = \frac{c}{2} \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a}{2\sin\alpha} \cdot \mathrm{tg}\beta$$

Тогава за обема на пирамидата се получава

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{a\mathrm{tg}\beta}{2\sin\alpha} = \frac{a^3\mathrm{tg}\beta\cos\alpha}{12\sin^2\alpha}\ .$$

ТЕМА 13

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 21.07.2004

Задача 1. Кое от числата $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$ е по-голямо от другото?

Да се решат уравненията:

Задача 2.

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) = \frac{5+6x}{4};$$

Задача 3.

$$5^{2x+1} + 5^{2x-1} + 5^{2x} = 155;$$

Задача 4.

$$1 + \log_2(x-1) = \log_2(x+1);$$

Задача 5.

$$2\cos x + \sin 2x = 0.$$

Да се решат неравенствата:

Задача 6.

$$6 \cdot 5^{x+1} - 25^x - 125 > 0;$$

Задача 7.

$$\log_2\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) < 1.$$

Задача 8. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 82 \end{array} \right.$$

Задача 9. Да се намери сумата

$$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Задача 10. Да се пресметне стойността на израза:

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\cos\alpha - \sin\alpha} \quad \text{, ако} \quad \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Задача 11. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+5}$

Задача 12. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}.$$

Задача 13. Даден е успоредник с остър ъгъл α и височини h_1 и h_2. Да се намери лицето на успоредника.

Задача 14. Страните на триъгълник са с дължини $7\,cm$, $24\,cm$ и $25\,cm$. Да се намерят радиусите на вписаната и описаната около триъгълника окръжности.

Задача 15. Равнобедрен трапец е описан около окръжност с радиус $3\,cm$ и ъгълът между диагоналите срещу бедрото е 60^o. Да се намери лицето на трапеца.

Задача 16. Височината на правилна четириъгълна пирамида е $1\,cm$, а основният ръб е $\sqrt{2}\,cm$. Да се намерят обемът и повърхнината на пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев» 21.07.2004

Задача 1.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{5-\sqrt{2}} \Leftrightarrow 5-\sqrt{2} < 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 2$$

Задача 2.

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{4} = \frac{5+6x}{4} \Leftrightarrow 6x-2-x+1 = 5+6x \Leftrightarrow x = -6$$

Задача 3.

$$5^{2x}\left(5+\frac{1}{5}+1\right) = 155 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Задача 4. Допустимите стойности на променливата се получават от системата

$$\text{ДС:} \quad \left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1.$$

Тогава

$$\log_2 2 + \log_2(x-1) = \log_2(x+1) \Leftrightarrow \log_2 2(x-1) = \log_2(x+1)$$

и след антилогаритмуване, се получава

$$2(x-1) = x+1 \Leftrightarrow x = 3 \in \text{ДС}$$

Задача 5.

$$2\cos x + 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(1+\sin x) = 0,$$

откъдето

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = -1\ ,$$

откъдето се получават решенията

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\ , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Задача 6.

$$6\cdot 5^x \cdot 5 - (5^x)^2 - 125 > 0.$$

Полага се $5^x = y$. Получава се неравенството $y^2 - 30y + 125 < 0$. Определят се корените на квадратния тричлен

$$D = 15^2 - 125 = 10^2, \quad y_{1,2} = 15 \pm 10, \quad y_1 = 5,\ y_2 = 25.$$

Тогава за решението на неравенството се получава $5 < y < 25$ и от полагането

$$5 < 5^x < 25 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Задача 7. Допустимите стойности на променливата се получават от неравенството

$$\frac{2x+1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty).$$

От свойствата на логаритмите (a=2>1)

$$\log_2 \frac{2x-1}{x+2} < \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{x+2} < 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Окончателно $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Задача 8. Изразява се x от първото уравнение и се замества във второто:

$$\left| \begin{array}{l} x = 8 + y \\ (8+y)^2 + y^2 = 82 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 8 + y \\ 2y^2 + 16y - 18 = 0 \end{array} \right. ,$$

откъдето се получават две решения $(x_1, y_1) = (-1, -9)$ и $(x_2, y_2) = (9, 1)$.

Задача 9. Очевидно $3 = 2 + 1$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

е сума на безкрайна геометрична прогресия с първи член $a_1 = 1$ и частно $q = \frac{1}{2}$. Сумата ѝ е $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$. Тогава за търсената сума се получава $2 + S = 2 + 2 = 4$.

Задача 10. Числителят и знаменателят се разделят на $\cos\alpha$:

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{3\mathrm{tg}\,\alpha - 5}{4 - \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{3.2 - 5}{4 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 11. Показателната функция $(a = 1/2 < 1)$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-1)^2 + 4}$$

е намаляваща и достига най-голямата си стойност за това x, за което показателят ѝ достига най-малка стойност, т.е. за $x = 1$. Следователно

$$f_{\text{НГС}} = f(1) = \frac{1}{16}.$$

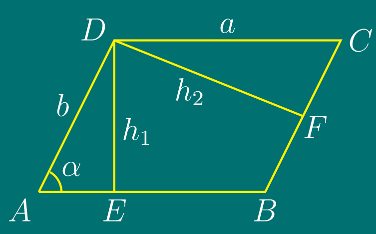
Задача 12. Нека да означим лявата страна с A, а дясната с B.

$$A = \frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$B = \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

Тъждеството е доказано.

Задача 13.



От правоъгълните триъгълници $\triangle AED$ и $\triangle DFC$ имаме:

$$a = \frac{h_2}{\sin\alpha} \quad , \quad b = \frac{h_1}{\sin\alpha}.$$

Тогава от формулата за лице на успоредник

$$S = ab\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{h_1 h_2}{\sin\alpha}$$

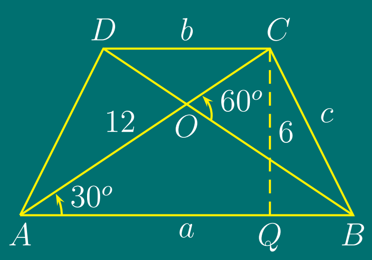
Задача 14. Полупериметърът на триъгълника е $p = (7+24+25)/2 = 28$. По Херонова формула за лице на триъгълник

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{28\cdot 21\cdot 4\cdot 3} = 4\cdot 7\cdot 3 = 84\,cm$$

Тогава

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{28} = 3\,cm \quad ; \quad R = \frac{abc}{4S} = 12,5\,cm$$

Задача 15.



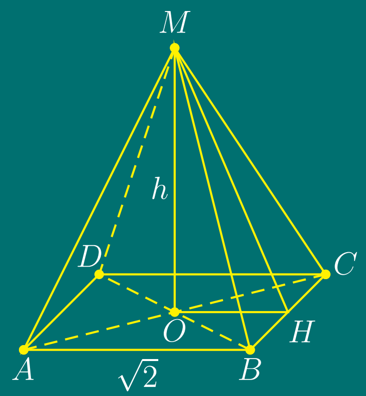
Тъй като трапецът е описан около окръжност с радиус $r = 3$, то $a+b = 2c$,

$$AQ = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = c,$$

$$S = \frac{a+b}{2}h = c.2r = 6c.$$

Ъгъл $\angle COB$ е външен за равнобедрения триъгълник $\triangle BCM$. Следователно $\angle COB = \angle OAB + \angle OBA \Rightarrow \angle OAB = 30^o$. В $\triangle AQC$, $AC = 2\,CQ = 12$. От $\triangle AQC$, $c = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$. Тогава за лицето се получава $S = 6\,c = 36\sqrt{3}$.

Задача 16.



Пирамидата е правилна четириъгълна, следователно основата ѝ е квадрат. Основният ръб е $a = \sqrt{2}$, а височината е $h = 1$. Тогава $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$. От $\triangle OHM$ по Питагорова Теорема

$$MH = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Тогава за обемът и повърхнината се получава

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2}^2 \cdot 1 = \frac{2}{3}\,cm^3 \quad , \quad S = \sqrt{2}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\,cm^2$$

ТЕМА 14

Тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 14.05.2005

Задача 1.

(а) Да се реши уравнението

$$2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x - 8 = 0 \ ;$$

(б) Да се реши неравенството

$$\sqrt{x^2 - x + 2} < x + 3 \ .$$

Задача 2. Дадена е функцията

$$f(x) = x^2 - 2(a-2)\,x + 4a + 4 \ ,$$

където a е реален параметър.

(а) Да се намерят стойностите на a, за които неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x.

(б) Ако x_1 и x_2 са реални корени на уравнението $f(x) = 0$, да се изрази $g(a) = \frac{1}{8}\,(x_1^3 + x_2^3)$ като функция на a.

(в) Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията $g(a)$ в затворения интервал $[-1, 0]$.

Задача 3. В триъгълника ABC е вписана окръжност, която се допира до страните AB и BC съответно в точките M и N. Ако $BM = 2\,cm$, $CN = 3\,cm$ и ъгъл ACB е 60^o, да се намерят:

(а) дължините на страните на триъгълника;

(б) лицето на триъгълника.

Задача 4. Основата на пирамида $ABCD$ е правоъгълният триъгълник ABC, в който ъгъл ACB е 90^o, дължината на единия катет е a и срещулежащият му ъгъл е α. Околната стена на пирамидата, която минава по дадения катет, е перпендикулярна на равнината на основата ѝ, а другите две стени са наклонени към основата под ъгъл β. Да се намери обемът на пирамидата.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 14.05.2005

Задача 1. **(а)**

$$2 \cdot (2^2)^x - 15 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 15 \cdot 2^x - 8 = 0$$

След полагане $2^x = t$, с допустими стойности за новата променлива $t > 0$, се получава квадратно уравнение

$$2t^2 - 15t - 8 = 0,$$

дискриминантата на което е $D = 225 + 64 = 289 = 17^2$, а корените са $t_1 = 8 \in$ ДС и $t_2 = \frac{1}{2} \notin$ ДС.

От полагането $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

(б) Допустими стойности на променливата x, са решенията на системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - x + 2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in \mathcal{R} \\ x > -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-3, +\infty)$$

След повдигане на втора степен на двете страни на неравенството, се получава

$$x^2 - x + 2 < x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 7x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Решенията са $x \in (-1, +\infty) \cap (-3, +\infty) = (-1, +\infty)$.

Задача 2.

$$f(x) = x^2 - 2(a-2)x + 4a + 4, \quad a \in \mathcal{R}$$

(а) Неравенството $x^2 - 2(a-2)x + 4a + 4 > 0$ е вярно за всяко x, тогава и само тогава, когато $D < 0$, т.е.

$$D = (a-2)^2 - (4a+4) = a^2 - 8a < 0 \Leftrightarrow a(a-8) < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 8).$$

(б)

$$g(a) = \frac{1}{8}\left(x_1^3 + x_2^3\right) = \frac{1}{8}(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= \frac{1}{8}(x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$$

От Формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = 2(a - 2) \quad , \quad x_1x_2 = 4a + 4.$$

Тогава

$$g(a) = \frac{1}{8} \cdot 2(a - 2)\left[4(a - 2)^2 - 3 \cdot 4(a + 1)\right] =$$
$$= (a - 2)\left[(a - 2)^2 - 3(a + 1)\right] = (a - 2)\left(a^2 - 7a + 1\right) = a^3 - 9a^2 + 15a - 2.$$

(в) Първата производна на функцията $g(a) = a^3 - 9a^2 + 15a - 2$ е

$$g'(\mathrm{a}) = 3a^2 - 18a + 15.$$

Критичните точки на функцията $g(a)$ са корени на уравнението

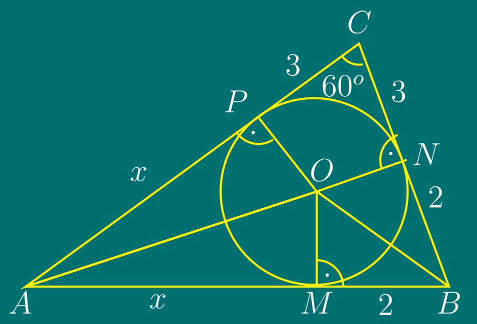
$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow 3(a^2 - 6a + 5) = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 5) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ или } a = 5.$$

Очевидно е, че и двете критични точки не са в интервала $[-1, 0]$.

В дадения интервал $[-1, 0]$, първата производна $g'(a)$ е положителна, следователно функцията $g(a)$ е растяща. Оттук следва, че най-голяма стойност функцията достига в десния край, а най-малка – в левия край на интервала $[-1, 0]$:

$$f_{\text{НГС}} = f(0) = -2 \qquad f_{\text{НМС}} = f(-1) = -27.$$

Задача 3. **(а)**



Точка O е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, т.е. O е пресечна точка на ъглополовящите.

От свойството на допирателните към окръжност следва, че $AM = AP = x$, $MB = BN = 2\,cm$, $CN = CP = 3\,cm$.

От Косинусова теорема за $\triangle ABC$:

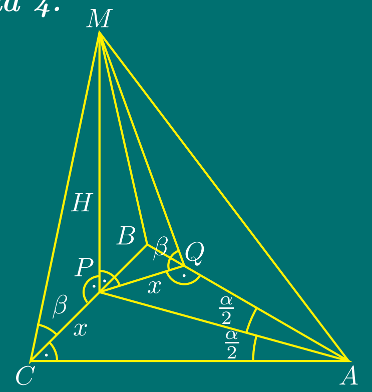
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cos 60^o$$
$$(x + 2)^2 = 5^2 + (x + 3)^2 - 2 \cdot 5(x + 3)\cos 60^o$$

$$x^2 + 4x + 4 = 25 + x^2 + 6x + 9 - 5x - 15 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$
$$\Rightarrow AB = 7\,cm, \quad BC = 5\,cm, \quad AC = 8\,cm.$$

(б) За лицето на $\triangle ABC$ по Херонова формула се получава

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+8+7}{2} = 10$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = 10\sqrt{3}\,cm^2$$

Задача 4.



По условие $BC = a$, $\angle CAB = \alpha$.

Нека $P = \text{пр}_{(ABC)}M$. Тъй като по условие $(BCM)\perp(ABC)$, то $P \in CB$. Построява се перпендикуляр от точка P към AB ($PQ\perp AB$). От $PQ = \text{пр}_{(ABC)}MQ$ и $PQ\perp AB$ по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MQ\perp AB$. Следователно $\angle MQP = \beta$.

От друга страна $PC\perp AC$ по условие и $PC = \text{пр}_{(ABC)}MC$, откъдето следва, че $MC\perp AC$. Следователно $\angle MCP = \beta$.

От $\triangle PCM \cong \triangle PQM$ (1. MP-обща; 2. $\angle PCM = \angle PQM = \beta$; 3. $\angle CPM = \angle QPM = 90°$) следва, че $CP = PQ$, но $CP\perp AC$ и $PQ\perp AB$, следователно точка P е на равни разстояния от правите AC и AB, т.е. P лежи на ъглополовящата на $\angle CAB \Rightarrow \angle CAP = \angle PAQ = \frac{\alpha}{2}$

Нека $AC = b$. Страната $BC = a$ по условие. От $\triangle ABC$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow AC = b = a\operatorname{ctg}\alpha$$

Лицето на основата на пирамидата е

$$B = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Нека $CP = x$. От $\triangle APC$ за x се получава

$$\frac{x}{b} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x = b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Нека височината на пирамидата $MP = H$. От $\triangle PQM$

$$\frac{H}{x} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow H = x\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$$

Тогава за обема на пирамидата се получава

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha}{2}\cdot a\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}a^3\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$$

ТЕМА 15

Тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика-тест за РУ «Ангел Кънчев», 15.05.2005

1. Да се съкрати дробта

$$\frac{4x + 4\sqrt{6}}{x^2 + 2x\sqrt{6} + 6}$$

Да се решат уравненията:

2.

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} \ ;$$

3.

$$3^{x+1} - 3^{x-1} = 24 \ ;$$

4.

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + 1 = 0 \ ;$$

5.

$$1 - 2\sin^2 x + 4\cos 2x = 5 \ .$$

Да се решат неравенствата:

6.

$$4 \cdot 3^{x+1} - 9^x - 27 > 0 \ ;$$

7.

$$\log_2\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) < 0 \ .$$

8. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}\ , \\ x + y = 5\ . \end{array} \right.$$

9. Да се намерят три числа, които образуват геометрична прогресия, ако сумата на първото и третото е 52, а квадрата на второто е 100.

10. Да се пресметне стойността на израза

$$\frac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}\ ,\ \text{ако}\ \ \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

11. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$y = x^3 - 12x + 7 \quad \text{при} \quad x \in [1, 3]$$

12. Да се докаже тъждеството

$$\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$$

13. Основата на триъгълник е $28\,cm$, а височината и медианата към нея са съответно $12\,cm$ и $13\,cm$. Да се намерят другите две страни на триъгълника.

14. Две окръжности с радиуси $3\,cm$ и $1\,cm$ се допират външно. Да се намери разстоянието от точката на допиране до общата им външна допирателна.

15. Височината на трапец, вписан в окръжност е $10\,cm$, а бедрото му се вижда от центъра на окръжността под ъгъл 60^o. Да се намери лицето на трапеца.

16. Две от стените на триъгълна пирамида са равностранни триъгълници със страна $\sqrt{2}\,cm$, а другите две са правоъгълни триъгълници. Да се намери повърхнината на пирамидата.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика-тест за РУ «Ангел Кънчев», 15.05.2005

Задача 1.

$$\frac{4x + 4\sqrt{6}}{x^2 + 2x\sqrt{6} + 6} = \frac{4(x+\sqrt{6})}{(x+\sqrt{6})^2} = \frac{4}{x+\sqrt{6}}$$

Задача 2. Допустими стойности на променливата са $x \neq \pm 1$. Общият знаменател е $(x-1)(x+1)$. След освобождаване от знаменателя, се получава уравнението

$$x(x-1) - 1 = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = x^2 + x \Leftrightarrow 2x = -1,$$

чието решение $x = -\frac{1}{2}$ е допустимо.

Задача 3. От свойствата на показателната функция

$$3^x \cdot 3 - \frac{3^x}{3} = 24.$$

След полагане $3^x = t$, с допустими стойности за новата променлива $D:\ t > 0$, се получава уравнението

$$3t - \frac{t}{3} = 24 \Leftrightarrow 9t - t = 72 \Leftrightarrow t = 9 \in D$$

От полагането $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Задача 4. Допустимите стойности на променливата, са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС: } \left| \begin{array}{l} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x > 1 \\ x > -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

От свойствата на логаритмичната функция:

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_2 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2(x-1)}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow x = 3 \in \text{ДС}$$

Задача 5.

$$1 - 2\sin^2 x + 4\cos 2x = 5 \Leftrightarrow \cos 2x + 4\cos 2x = 5 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi\ ,\ k \in \mathcal{Z}.$$

Задача 6. От свойствата на показателната функция, даденото неравенство е еквивалентно на

$$4 \cdot 3^x \cdot 3 - 3^{2x} - 27 > 0,$$

което след полагане $3^x = t$ с допустими стойности $D : t > 0$, се преобразува в

$$12t - t^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow (t-9)(t-3) < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 9 \Leftrightarrow 3^1 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Задача 7.

$$\text{ДС: } \frac{2x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (2x-1)(x+2) > 0 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

От свойствата на логаритмичната функция при $a = 2 > 1$

$$\log_2 \frac{2x-1}{x+2} < \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-3)(x+2) < 0 \\ x \neq -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-2,3) \cap \text{ДС} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Задача 8.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{5}{xy} = \frac{5}{6} \\ x+y=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} xy = 6 \\ x+y=5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(5-x) = 6 \\ y = 5-x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = 5-x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{array} \right.$$

Задача 9. Нека първият член на геометричната прогресия е a, а частното е q $(a, q \neq 0)$: От условието a и q са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} a + aq^2 = 52 \\ (aq)^2 = 100 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a(1+q^2) = 52 \\ aq = \pm 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a(1+q^2) = 52 \\ aq = 10 \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} a(1+q^2) = 52 \\ aq = -10 \end{array} \right.$$

Първа система:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{10}{q}(1+q^2) = 52 \\ a = \frac{10}{q} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5q^2 - 26q + 5 = 0 \\ aq = 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = 5 \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} a = 50 \\ q = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Втора система:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{10}{q}(1+q^2) = 52 \\ a = -\frac{10}{q} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5q^2 + 26q + 5 = 0 \\ aq = -10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_3 = 2 \\ q = -5 \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} a = 50 \\ q = -\frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Следователно решенията са:

$$(a, q) = \left\{ (2,5); \left(50, \frac{1}{5}\right); (2,-5); \left(50, -\frac{1}{5}\right) \right\}$$

Задача 10.

$$\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha} = \frac{\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 3} = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 4 - 3} = \frac{6}{5}$$

Задача 11. Първата производна на функцията $y = x^3 - 12x + 7$ е

$$y' = 3x^2 - 12.$$

Критичните точки са корени на уравнението

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2\ , x_2 = -2$$

Втората производна $y''(x) = 6x$ има стойности в критичните точки

$$y''(2) = 12 > 0 \quad \text{и} \quad y''(-2) = -12 < 0,$$

откъдето следва, че функцията има локален максимум при $x = -2$ и локален минимум при $x = 2$.

Тъй като само $x = 2$ е в интервала $[1, 3]$, се определят стойностите на функцията в точките 1, 2 и 3 и се сравняват:

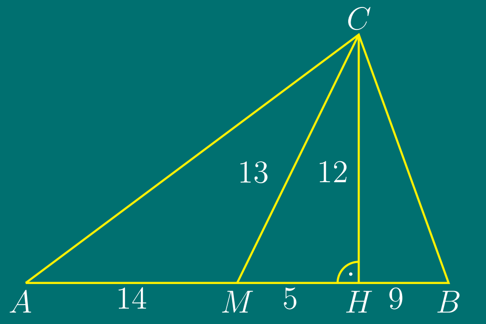
$$y_{min}(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 7 = -9 \quad , \quad y(1) = -4 \quad , \quad y(3) = -2$$

$$f_{\text{НГС}} = \max\{y(1), y(3)\} = \max\{-4, -2\} = -2 \quad , \quad f_{\text{НМС}} = y_{min}(2) = -9.$$

Задача 12.

$$\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x$$

Задача 13.



По условие

$$AB = 28\,cm \Rightarrow AM = MB = 14\,cm.$$

От $\triangle MHC$ по Теоремата на Питагор

$$MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

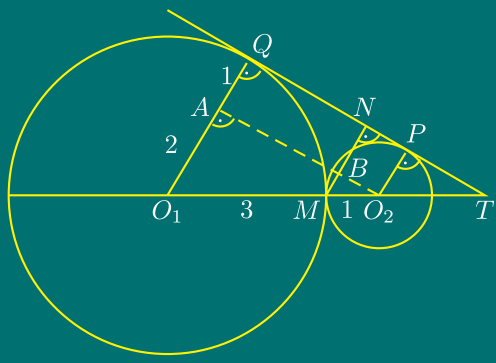
$$\Rightarrow HB = 9\,cm, AH = 19\,cm.$$

От $\triangle AHC$:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 19^2 + 12^2 = 361 + 144 = 505 \Rightarrow AC = \sqrt{505}\,cm.$$

От $\triangle BHC$: $BC^2 = HB^2 + CH^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow BC = 15\,cm.$

Задача 14.



Нека $MN = d$ е търсеното разстояние.

Построява се

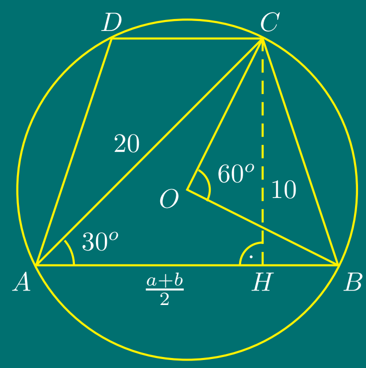
$$O_2A \perp O_1Q \quad , \quad O_2A \cap MN = B.$$

$BN = 1$, $MB = d - 1$, $O_1A = 2$, $AQ = 1$.

От $\triangle O_1O_2A \sim \triangle MO_2B$:

$$\frac{O_1O_2}{MO_2} = \frac{O_1A}{MB} \Leftrightarrow \frac{4}{1} = \frac{2}{d-1} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}\,cm$$

Задача 15.



Нека $a = AB$, $b = CD$. Лицето на трапеца е

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot 10 = 5(a+b).$$

Всеки вписан в окръжност трапец е равнобедрен.

$$AH = \frac{a+b}{2}\ ,\ BH = \frac{a-b}{2}.$$

По условие централният ъгъл $\angle BOC = 60^o \Rightarrow \angle BOC =$ м.$\overset{\frown}{BC} = 60^o$. Тъй като $\angle BAC$ е вписан в окръжността, то $\angle BAC = \frac{1}{2}$ м.$\overset{\frown}{BC} = 30^o$.

От $\triangle AHC$ - правоъгълен и $\angle CAH = 30^o, CH = 10\,cm \Rightarrow AC = 20\,cm$.

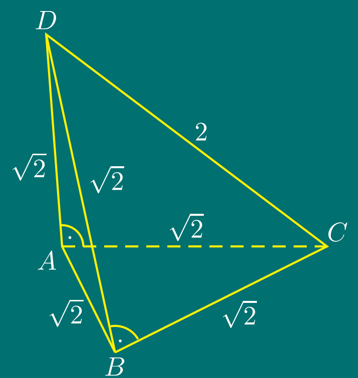
От $\triangle AHC$ по Теоремата на Питагор

$$\frac{AH}{AC} = \cos 30^o \Leftrightarrow AH = 20\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = 10\sqrt{3}.$$

Следователно, за лицето на трапеца се получава

$$S = 5(a+b) = 5 \cdot 20\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,cm^2$$

Задача 16.



От $\triangle BCD$

$$CD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\,cm$$

$$S_{\text{пов}} = 2\,(S_{ABC} + S_{BCD})$$

$$S_{\text{пов}} = 2\left(\frac{(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$S_{\text{пов}} = (\sqrt{3} + 2)\ cm^2.$$

ТЕМА 16

Трениировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 18.06.2005

Задача 1. Да се решат:

а) уравнението

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \ ;$$

б) неравенството

$$\frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{2x+1} \leq \frac{\sqrt{-x^2+4x-3}}{x-2} \ .$$

Задача 2. Дадена е функцията

$$f(x) = x^2 + (m+1)x + 3m - 4 \ ,$$

където m е реален параметър.

а) За кои m уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени?

б) За кои m уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена с различни знаци?

в) Нека x_1 и x_2 са корени на уравнението $f(x) = 0$. За кое m се достига най-малката стойност на израза $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$?

Задача 3. В триъгълника ABC височината през върха C има дължина 12 cm, а страните AC и BC имат дължини 13 cm и 15 cm. Намерете дължините на радиуса на вписаната окръжност, медианата и ъглополовящата през върха C.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основен ръб a и ъгъл φ между две съседни околни стени. Намерете обема на пирамидата и покажете, че $\varphi > 90^o$.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 18.06.2005

Задача 1.

Допустими стойности на променливата x са всички $x \neq k\pi$.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cos x - (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - \cos x) = 0$$

1. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ или
2. $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + l\pi$, $l \in \mathcal{Z}$

б). Допустими стойности на променливата x са решения на системата неравенства

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-1)(x-3) \leq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2}\ ,\ x \neq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(x-1)}\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ или } x = 1, \text{ или } \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-2} \leq 0.$$

$$\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(2x+1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x+3)(2x+1)(x-2) \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2}\ ,\ x \neq 2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty) \cap \text{ДС} \Leftrightarrow x \in (2, 3]$$

Окончателно, като се вземе предвид, че $x = 1$ и $x = 3$ също са решения, се получава $x \in \{1\} \cup (2, 3]$.

Задача 2.

а) Уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени, когато дискриминантата $D < 0$, т.е.

$$D = (m+1)^2 - 4(3m-4) = m^2 - 10m + 17 < 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(5 - 2\sqrt{2}; 5 + 2\sqrt{2}\right)$$

б) Уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена с различни знаци, когато

$$\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} m^2 - 10m + 17 > 0 \\ 3m - 4 < 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} m \in \left(-\infty, 5 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(5 + 2\sqrt{2}, +\infty\right) \\ m \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$$

в) Изразът се преобразува по такъв начин, че да стане функция само на сбора и произведението на корените на квадратното уравнение:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2) + 2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2. \end{aligned}$$

От Формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = -(m+1) \quad , \quad x_1 x_2 = 3m - 4.$$

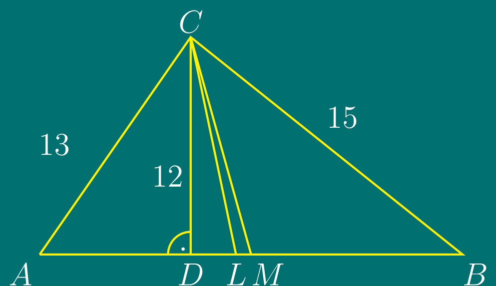
Тогава

$$A = (m+1)^2 - 2(3m-4) + 2(m+1) + 2 = m^2 - 2m + 13 = (m-1)^2 + 12 \geq 12.$$

Следователно, май-малката стойност на A е 12 и се достига при $m = 1$.

Задача 3.

Първи случай: $\angle BAC < 90^\circ$



От Теоремата на Питагор, приложена за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC \Rightarrow$

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\,cm,$$

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,cm,$$

$$\Rightarrow AB = AD + DB = 14\,cm.$$

Полупериметърът на $\triangle ABC$ е

$$p = (13 + 14 + 15)/2 = 21,$$

откъдето се намира лицето на $\triangle ABC$ по Херонова формула

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84\,cm^2$$

От друга страна

$$S = pr \Leftrightarrow 84 = 21r \Leftrightarrow r = 4\,cm.$$

От формулата за медианата, изразена чрез страните на триъгълника:

$$CM = m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 13^2 + 2\cdot 15^2 - 14^2} = \frac{1}{2}\sqrt{592} = 2\sqrt{37}.$$

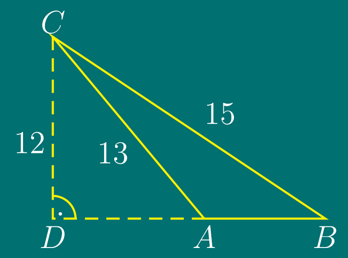
За определяне на ъглополовящата CL, нека да означим $AL = x$, $BL = y$. Тогава от свойството на ъглополовящата и от $AL + LB = AB$, се получава системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{13}{15} \\ x + y = 14 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 15(14-y) = 13y \\ x = 14 - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 28y = 210 \\ x = 14 - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 13/2 \\ y = 15/2 \end{array} \right.$$

Тогава от формулата за ъглополовящата

$$l_c^2 = ab - xy = 13\cdot 15 - \frac{13}{2}\cdot\frac{15}{2} = 195\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow l_c = \frac{3}{2}\sqrt{65}.$$

Втори случай: $\angle BAC > 90^o$



Аналогично на Първи случай по Теоремата на Питагор за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC \Rightarrow$

$$AD = 5\,cm\ ,\ \ BD = 9\,cm,$$

$$AB = BD - AD = 4\,cm.$$

Тогава $p = (13 + 4 + 15)/2 = 16$ и за лицето на $\triangle ABC$ по Херонова формула:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16(16-13)(16-4)(16-15)} = 24\,cm^2$$

От друга страна

$$S = pr \Leftrightarrow 24 = 16r \Leftrightarrow r = 3/2\,cm.$$

От формулата за медианата

$$CM = m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 13^2 + 2\cdot 15^2 - 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{772} = \sqrt{193}.$$

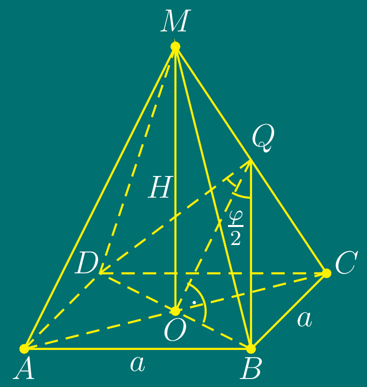
Нека да означим $AL = x$, $BL = y$. Тогава от свойството на ъглополовящата и от $AL + LB = AB$, се получава системата:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{13}{15} \\ x + y = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 15(4-y) = 13y \\ x = 4 - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 28y = 60 \\ x = 4 - y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 13/7 \\ y = 15/7 \end{array} \right.$$

Тогава от формулата за ъглополовящата

$$l_c^2 = ab - xy = 13 \cdot 15 - \frac{13}{7} \cdot \frac{15}{7} = 195 \cdot \frac{48}{49} \Rightarrow l_c = \frac{12}{7}\sqrt{65}.$$

Задача 4.



Нека $BQ \perp CM$, $BQ \in (BCM)$.

От $\triangle BCQ \cong \triangle DCQ$

1. $BC = DC = a$;
2. $\angle BCQ = \angle DCQ$;
3. CQ- обща

следва, че $DQ = BQ$ и $\angle DQC = 90^o$ $\Rightarrow \angle BDQ = \varphi$.

Тъй като $BQ = DQ$ и O- среда на BD, следва, че QO е височина, ъглополовяща и медиана в $\triangle BQD$. Следователно $\angle BQO = \angle DQO = \frac{\varphi}{2}$.

От $\triangle OBQ$:

$$\frac{OQ}{OB} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow OQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Тъй като $BQ \perp CM$ и $DO \perp CM$ следва, че равнината $(BDQ) \perp CM \Rightarrow OQ \perp CM \Rightarrow$ $\triangle OQC$ - правоъгълен.

По Теоремата на Питагор за $\triangle OQC$:

$$QC = \sqrt{OC^2 - OQ^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{a\sqrt{-2\cos\varphi}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

За да бъде дефиниран горният израз трябва $\cos\varphi < 0$, т.е. $90^o < \varphi < 180^o$.

От подобието на триъгълниците $\triangle OCQ \sim \triangle MCO$

1. $\angle \mathrm{O}QC = \angle M\mathrm{O}C = 90^o$;
2. $\angle C$ - общ,

следва, че

$$\frac{OQ}{MO} = \frac{CQ}{CO} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{H} = \frac{\dfrac{a\sqrt{-2\cos\varphi}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{a\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-2\cos\varphi}} \text{ ед.}$$

Тогава за обема се получава

$$V = \frac{1}{3}\cdot B\cdot H = \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-2\cos\varphi}} = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-2\cos\varphi}} \text{ куб.ед.}$$

ТЕМА 17

Тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика-тест за РУ «Ангел Кънчев», 19.06.2005

Да се решат уравненията:

1.

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 3 - x \ ;$$

2.

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250 \ ;$$

3.

$$\lg(41 - 5x) - \lg(x + 2) = 1 \ ;$$

4.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x \ .$$

Да се решат неравенствата:

5.

$$\frac{x^2(x-1)(x+1)^3}{x+4} \leq 0 \ ;$$

6.

$$4^{\frac{3}{x}} \leq \sqrt{2^x} \ ;$$

7.

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - x}{x + 1} < 0 \ ;$$

8.

$$\frac{x^2 - x + 1}{|\ x - 1\ | - 1} < 1\ .$$

9. Намерете частното и първия член на геометрична прогресия, за която сумата от първите n члена е

$$S_n = 3^{n+1} - 3$$

Намерете границите:

10.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x - \cos 8x}{x\ \mathrm{tg}\, 6x}\ ;$$

11.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}\ \frac{\cos x}{\pi - 2x}\ ;$$

12. Покажете, че ако

$$\cos(2\alpha + \beta) = 1,$$

то

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) - \mathrm{tg}\, \alpha = 2\, \mathrm{tg}\, \frac{\beta}{2}\ .$$

13. Намерете най-малката и най-голяма стойност на функцията

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$$

за $x \in [-10, 2]$.

14. Правоъгълен триъгълник има хипотенуза $15\, cm$ и лице $54\, cm^2$. Да се изчисли разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност.

15. Да се намерят дължините на радиусите на две външно допиращи се окръжности, ако разстоянието между центровете им е $4\, cm$, а общите им външни допирателни сключват ъгъл 60^o .

16. Основата на триъгълна пирамида е равностранен триъгълник със страна a. Една от околните стени е също равностранен триъгълник и сключва с равнината на основата ъгъл с големина 30^o. Намерете обема на пирамидата.

Решения

Решения на темата от тренировъчен кандидатстудентски изпит по математика-тест за РУ «Ангел Кънчев», 19.06.2005

Задача 1.

Допустими стойности на променливата x са

$$\text{ДС:}\left|\begin{array}{l} x^2+3x+2\geq 0 \\ 3-x\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(x+1)(x+2)\geq 0 \\ x\leq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\in(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty) \\ x\in(-\infty,3]\end{array}\right.$$

Следователно ДС: $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,3]$.

След повдигане на двете страни на ирационалното уравнение на втора степен, се получава

$$x^2+3x+2=9-6x+x^2\Leftrightarrow x=\frac{7}{9}\in\text{ДС}$$

Задача 2.

$$5^{2x-1}+5^{x+1}=250\Leftrightarrow\frac{(5^x)^2}{5}+5^x\cdot 5=250.$$

След полагане $5^x=y$, с допустими стойности за новата променлива $D_y:\ y>0$, се получава квадратно уравнение

$$\frac{y^2}{5}+5y-250=0\Leftrightarrow y^2+25y-1250=0$$

с дискриминанта $D=625+5000=5625=75^2$ и корени $y_1=-50\notin D_y$ и $y_2=25\in D_y$.

От полагането

$$5^x=25\Leftrightarrow 5^x=5^2\Leftrightarrow x=2\in\text{ДС}.$$

Задача 3. Допустими стойности за x са решенията на системата неравенства

$$\text{ДС:}\quad\left|\begin{array}{l}41-5x>0\\ x+2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x<\frac{41}{5}\\ x>-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-2,\frac{41}{5}\right)$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\lg(41-5x)-\lg(x+2)=1\Leftrightarrow\lg\frac{41-5x}{x+2}=\lg 10.$$

След антилогаритмуване, се получава уравнението

$$\frac{41-5x}{x+2}=10\Leftrightarrow 41-5x=10x+20\Leftrightarrow x=\frac{7}{5}\in\text{ДС}.$$

Задача 4.

$\sin^4 x+\cos^4 x = \sin x\cos x \Leftrightarrow \sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x = \sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow 2-\sin^2 2x = \sin 2x.$$

След полагане $\sin 2x = u$, $u \in [-1,1]$, се получава квадратно уравнение

$$1-\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}u \Leftrightarrow u^2+u-2=0 \Leftrightarrow u_1 = 1 \in \text{ДС},\ \ u_2 = -2 \notin \text{ДС}.$$

От полагането $\sin 2x = 1$ се получават решенията $x = \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathcal{Z}$

Задача 5.

Допустими стойности за променливата са $x \neq -4$. Неравенството се решава по метода на интервалите

$$\frac{x^2(x-1)(x+1)^3}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2(x-1)(x+1)^3(x+4) \leq 0 \\ x \neq -4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-1)(x+1)(x+4) \leq 0 \\ x \neq -4 \end{array} \right. \qquad \text{или} \quad x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-4)\cup[-1,1].$$

Задача 6. Допустими стойности за x са $x \neq 0$.

Тъй като $a = 2 > 1$, неравенството

$$2^{\frac{6}{x}} \leq 2^{\frac{x}{2}}$$

е еквивалентно на

$$\frac{6}{x} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{12-x^2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x) \leq 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-2\sqrt{3},0\right)\cup\left[2\sqrt{3},+\infty\right).$$

Задача 7. Допустими стойности на променливата са

$$\text{ДС: } \frac{x(x-1)}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x-1)(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x \in (-1,0)\cup(1,+\infty).$$

Основата $a = \frac{1}{2} < 1$, следователно логаритмичната функция е намаляваща:

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-x}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \left[x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\left[x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right](x+1)>0 \\ x+1\neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-1, 1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, +\infty\right).$$

Задача 8. Допустимите стойности на променливата се получават от условието знаменателят да не се анулира, т.е.

$$|x-1|-1\neq 0 \Leftrightarrow |x-1|\neq 1 \Leftrightarrow x-1\neq \pm 1 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ и } x\neq 0$$

Първи случай: $x-1\geq 0$, т.е. $x\in[1,2)\cup(2,+\infty)$.

Тогава

$$|x-1| = x-1$$

и даденото неравенство е еквивалентно на

$$\frac{x^2-x+1}{x-1-1}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x-2}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{x-2}<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2.$$

Следователно $x\in[1,2)\cup(2,+\infty)\cap(-\infty,2) \Rightarrow x\in[1,2)$

Втори случай: $x-1<0$, т.е. $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$.

Тогава

$$|x-1| = -(x-1)$$

и даденото неравенство е еквивалентно на

$$\frac{x^2-x+1}{-x+1-1}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{-x+1-1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{-x}<0 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0.$$

Следователно $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cap(0,+\infty) \Rightarrow x\in(0,1)$.

Окончателно $x\in(0,1)\cup[1,2) \Leftrightarrow x\in(0,2)$.

Задача 9.

От дадената формула за сумата на първите n члена, записана за n и $(n+1)$, се получава

$$\begin{aligned} S_n &= 3^{n+1}-3 \\ S_{n+1} &= 3^{n+2}-3, \end{aligned}$$

откъдето

$$S_{n+1}-S_n = a_{n+1} = 3^{n+2}-3^{n+1} = 6\cdot 3^n.$$

От формулата за (n+1)-ия член

$$a_{n+1} = a_1 q^n = 6\cdot 3^n \quad \Rightarrow \quad a_1 = 6 \quad \text{и} \quad q = 3.$$

Задача 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 8x}{x\operatorname{tg}6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 6x\sin(-2x)}{x\frac{\sin 6x}{\cos 6x}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 6x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=4$$

Задача 11.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{2}$$

Задача 12.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha&\\&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\beta}{\frac{1}{2}\left(\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta\right)}=\frac{2\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{2\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}\\&=2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

Задача 13. Първата производна на функцията $f(x)$ е

$$f'(x)=6x^2+6x-12.$$

Критичните точки се получават от уравнението $f'(x)=0$, т.е.

$$x^2+x-2=0\Leftrightarrow x_1=-2\ ,\ x_2=1.$$

Изследва се знакът на първата производна:

$$\begin{aligned}&f'(x)>0\quad\text{за}\quad x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty),\\&f'(x)<0\quad\text{за}\quad x\in(-2,1).\end{aligned}$$

Следователно $f(x)$ има локален максимум при $x=-2$ и локален минимум при $x=1$.

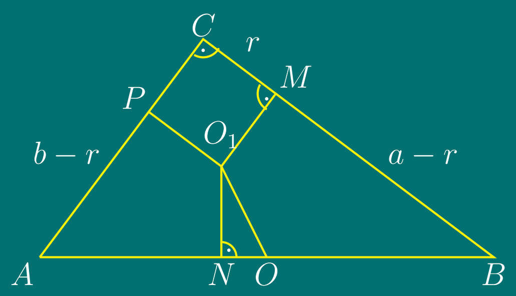
Стойностите на функцията в точките на екстремум и в краищата на интервала $[-10,2]$ са:

$$f(-10)=-1579\quad,\quad f(-2)=21\quad,\quad f_{min}(1)=6\quad,\quad f(2)=5.$$

Следователно

$$f_{\text{НГС}}=f(-2)=21\quad,\quad f_{\text{НМС}}=f(-10)=-1579.$$

Задача 14.



Нека O_1 е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, а $O \in AB$ е центърът на описаната окръжност. $AO = OB + R = 7.5\,cm$. Нека радиусът на вписаната окръжност е r, катетите да са a и b. Четириъгълникът O_1MCP е квадрат.

От свойството на допирателните към окръжност

$$BN = BM = a - r\ ,\ AN = AP = b - r.$$

Нека търсеното разстояние е $OO_1 = x$. От Теоремата на Питагор за $\triangle ABC$ следва, че $a^2 + b^2 = 15^2$. По условие $S = 54\,cm^2 \Rightarrow ab = 108$.

От получената система

$$\left|\begin{array}{l} a^2+b^2=15^2 \\ ab=108 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a+b)^2-2ab=225 \\ ab=108 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a+b)^2-216=225 \\ ab=108 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a+b=21 \\ ab=108 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=21-b \\ (21-b)b=108 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=21-b \\ b^2-21b+108=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=21-b \\ b_1=12, b_2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a,b)=(12,9) \vee (a,b)=(9,12)$$

Първи случай: $a = 12$, $b = 9$

$$ON = \frac{c}{2} - AN = 7.5 - 6 = 1.5 \quad , \quad r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{12+9-15}{2} = 3,$$

$$AN = b - r = 9 - 3 = 6$$

От Теоремата на Питагор

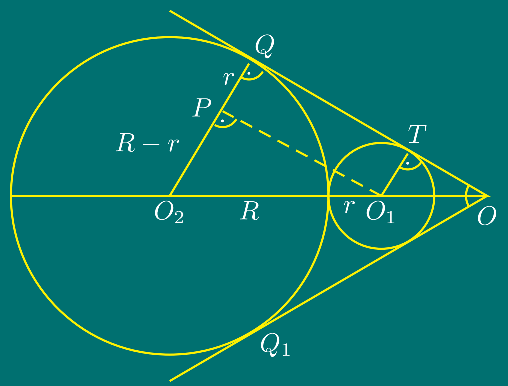
$$x^2 = r^2 + ON^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow OO_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Втори случай: $a = 9$, $b = 12$

$$ON = \frac{c}{2} - BN = 1.5 \quad , \quad r = 3 \quad , \quad AN = b - r = 12 - 3 = 9$$

$$x^2 = r^2 + ON^2 \Leftrightarrow OO_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Задача 15.



По условие $R + r = O_1O_2 = 4$.

Построява се

$$O_1P \parallel TQ \quad , \quad O_1P \perp O_2Q$$

$$\angle Q_1OQ = 60^o \Rightarrow \angle QOO_2 = \angle PO_1O_2 = 30^o.$$

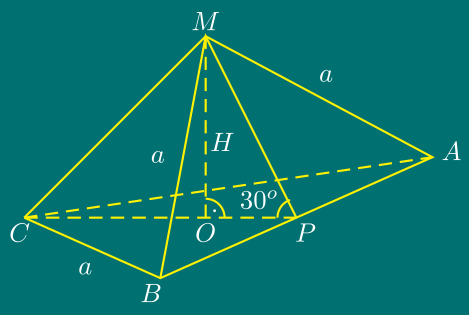
От $\triangle O_1O_2P$

$$R - r = \frac{1}{2}O_1O_2 \Rightarrow R - r = 2.$$

Получава се система:

$$\left| \begin{array}{l} R + r = 4 \\ R - r = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2R = 6 \\ 2r = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow (R, r) = (3, 1)$$

Задача 16.



Обемът на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3}BH,$$

където

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

е лицето на основата ѝ а $H = MO$ е височината ѝ.

По условие $\triangle ABM$ е равностранен, следователно

$$AP = PB = \frac{a}{2} \quad , \quad PM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad , \quad AM = BM = AB = a.$$

В правоъгълния триъгълник $\triangle POM$: $\angle MPO = 30^o$ (по условие) и

$$H = \frac{1}{2} \cdot PM = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Следователно за обема на пирамидата се получава

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16} \text{ куб.ед.}$$

ТЕМА 18

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 21.07.2005

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = (m+5)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 4,$$

където m е реален параметър.

а) Да се намерят всички стойности на m, така че уравнението

$$f(x) = 0$$

да има корен 0;

б) Да се намерят всички стойности на m, така че неравенството

$$f(x) < 0$$

да е изпълнено за всяка реална стойност на x;

в) Да се изрази

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

като функция на m, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$.

Задача 2. Да се реши:

а) уравнението

$$\cos 2x - 5 \cdot \sin x - 3 = 0;$$

б) неравенството

$$\log_2 \frac{2x+1}{x+3} < 0.$$

Задача 3. Около окръжност е описан правоъгълен трапец. Допирната точка на окръжността с бедрото го дели на отсечки с дължини $16\,cm$ и $9\,cm$.

а) Да се намерят дължините на страните на трапеца;

б) Да се намери лицето на четириъгълника, чийто върхове са допирните точки на окръжността със страните на трапеца.

Задача 4. Дадена е пирамида $ABCDM$, с основа правоъгълникът $ABCD$, като дължините на всички околни ръбове са равни. Дължините на основните ръбове са $AB = 4\,cm$ и $BC = 3\,cm$, а ъгълът между два околни ръба, нележащи в една стена, е 2α.

а) Да се намери обемът на пирамидата;

б) Да се намери разстоянието от точка A до равнината (BDM).

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 21.07.2005

Задача 1.

а) От определението за корен на уравнение:

$$f(0) = (m+5)\cdot 0 - 2(m+1)\cdot 0 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

б) Неравенството е изпълнено за всяка реална стойност на m, когато:

$$\left|\begin{array}{l} m+5<0 \\ D<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m<-5 \\ (m+1)^2-(m+5)(2m-4)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m<-5 \\ m^2+4m-21>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\in(-\infty,-5) \\ (m+7)(m-3)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m\in(-\infty,-5) \\ m\in(-\infty,-7)\cup(3,+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in(-\infty,-7).$$

в) От Формулите на Виет:

$$x_1+x_2 = \frac{2(m+1)}{m+5} \quad \text{и} \quad x_1x_2 = \frac{2m-4}{m+5}\ .$$

Тогава

$$A = \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$$
$$= \left(\frac{4(m+1)^2}{(m+5)^2} - 2\cdot\frac{2(m-2)}{(m+5)}\right) : \frac{2(m-2)}{m+5}$$
$$= \frac{2(11-m)}{(m-2)(m+5)}$$

Задача 2.

а) Като се използва тригонометричната формула

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

уравнението се преобразува във вида:

$$\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0.$$

Полага се

$$\sin x = t \quad , \quad t\in[-1,1].$$

Решенията на полученото квадратно уравнение

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

са

$$t_1 = -2 \notin [-1, 1] \quad , \quad t_2 = -\frac{1}{2} \in [-1, 1].$$

От полагането се получава уравнението

$$\sin x = -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi \quad , \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

б) Допустими стойности на променливата са решенията на неравенството:

$$\text{ДС:} \quad \frac{2x+1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

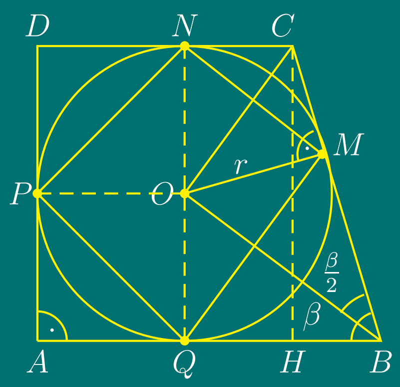
Решава се логаритмичното неравенство (a $= 2 > 1$)

$$\log_2 \frac{2x+1}{x+3} < \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2).$$

Окончателно

$$x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap (-3, 2) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

Задача 3.



Нека допирните точки на страните BC, CD, DA и AB на трапеца и вписаната окръжност са съответно M, N, P и Q.

По условие $BC = 16 + 9 = 25\,cm$.

Тъй като BO и CO са ъглополовящи съответно на $\angle ABC$ и $\angle BCD$ и $\angle ABC + \angle BCD = 180^o$, то

$$\angle OBC + \angle BCO = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = 90^o$$

Следователно, $\triangle BCO$ е правоъгълен, защото

$$\angle BOC = 180^o - (\angle OBC + \angle BCO) = 90^o.$$

От $\triangle BCO \Rightarrow$

$$OM^2 = BM \cdot MC \Rightarrow OM = 12\,cm.$$

Тогава $AD = NQ = 2 \cdot OM = 24\,cm$.

Построява се височината CH на трапеца ($CH \perp AB$, $H \in AB$).

Прилага се Теорема на Питагор за $\triangle BCH$:

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 7\,cm$$

Следователно $AB - CD = 7\,cm$.

Тъй като трапецът е описан четириъгълник, то

$$AB + CD = AD + BC \Leftrightarrow AB + CD = 49\,cm.$$

Основите на трапеца се намират от системата

$$\left| \begin{array}{l} AB - CD = 7 \\ AB + CD = 49 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} AB = 28\,cm \\ CD = 21\,cm \end{array} \right.$$

б) Лицето на четириъгълника $MNPQ$ е

$$S_{MNPQ} = S_{QNP} + S_{QMN} = S_{QNP} + (S_{QBCN} - S_{QBM} - S_{MCN})$$

$$S_{QNP} = 2S_{OPQ} = 2 \cdot \frac{OP \cdot OQ}{2} = 12 \cdot 12 = 144\,cm^2$$

$$S_{QBCN} = \frac{QB + CN}{2} \cdot CH = \frac{16 + 9}{2} \cdot 24 = 300\,cm^2$$

От $\triangle BCH \Rightarrow$

$$\sin\beta = \frac{CH}{CB} = \frac{24}{25}.$$

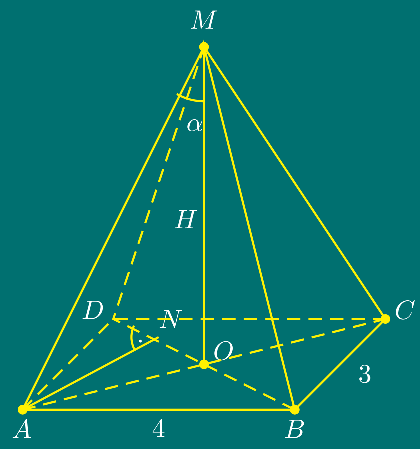
Тогава

$$S_{QBM} = \frac{QB \cdot BM}{2} \cdot \sin\beta = \frac{16 \cdot 16}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{3072}{25}\,cm^2$$

$$S_{MCN} = \frac{MC \cdot CN}{2} \cdot \sin(180^o - \beta) = \frac{9 \cdot 9}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{972}{25}\,cm^2$$

$$S_{MNPQ} = 144 + 300 - \frac{3072}{25} - \frac{972}{25} = 444 - \frac{4044}{25} = \frac{7056}{25} = 282{,}24\,cm^2$$

Задача 4.



По условие околните ръбове на пирамидата са равни, откъдето следва, че техните проекции върху равнината на основата също са равни. Следователно, върхът на пирамидата се проектира в центъра на описаната около правоъгълника $ABCD$ окръжност, т.е. в пресечната точка на диагоналите му.

В равнобедрения $\triangle ACM$, MO е височина, ъглополовяща и медиана, следователно $\angle AMO = \angle CMO = \alpha$.

а) Обемът на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H.$$

Лицето на основата (правоъгълник) е

$$B = AB \cdot BC = 4 \cdot 3 = 12\,cm^2.$$

По Теоремата на Питагор за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16+9} = 5\,cm \quad , \quad \text{AO} = OC = 2{,}5\,cm\ .$$

От $\triangle AOM \Rightarrow$

$$\frac{H}{AO} = \operatorname{ctg}\alpha \quad \Rightarrow \quad H = AO \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5\ \operatorname{ctg}\alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2{,}5 \operatorname{ctg}\alpha = 10 \cdot \operatorname{ctg}\alpha\, cm^3$$

б). Тъй като $(ABCD)\perp(BDM)$ и пресечницата им е BD, то ортогоналната проекция на точка A в равнината (BDM) е точка $N \in BD$ и $AN \perp BD$.

От $\triangle ABD \Rightarrow$

$$S_{ABD} = \frac{BD \cdot AN}{2} = \frac{AB \cdot AD}{2} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot AN}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow AN = \frac{12}{5} = 2{,}4\,cm$$

ТЕМА 19

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 22.07.2005

Задача 1. Да се пресметне изразът

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 2\ .$$

Задача 2. Да се пресметне изразът

$$\left(5^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}} : \frac{|-5|^0 \cdot \sqrt{5}}{5^{-1/2}}.$$

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$\frac{x+5}{3x+2} - \frac{x+6}{x-2} = \frac{x^2+x+5}{3x^2-4x-4}.$$

Задача 4. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1}\ .$$

Задача 5. Да се реши уравнението:

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-5) = \log_2(x^2-6x)$$

Задача 6. Да се реши уравнението:

$$9^x - 3^x - 6 = 0\ .$$

Задача 7. Да се реши неравенството:

$$\frac{x^2+5x-6}{|x+4|}<0.$$

Задача 8. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} x+y=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{array}\right. .$$

Задача 9. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+3x^2+1}{5x^4-2x-5}\ .$$

Задача 10. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$y=\frac{2x-1}{3-x}\quad \text{за}\quad x\in[-1,2]$$

Задача 11. Да се опрости изразът:

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(\sqrt{2}\cos\alpha-1)(\sqrt{2}\cos\alpha+1)}\ .$$

Задача 12. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha\ .$$

Задача 13. Радиусът на описаната около правоъгълен триъгълник окръжност е $12.5\,cm$, а радиусът на вписаната в него окръжност е $3\,cm$. Да се намерят дължините на катетите му.

Задача 14. В равнобедрен трапец, диагоналите са перпендикулярни, а средната му основа е $7\,cm$. Да се намери лицето на трапеца.

Задача 15. Даден е триъгълник ABC, в който $AC=BC=5\,cm$, $AB=6\,cm$. Да се намери разстоянието от центъра на описаната окръжност до страната AC.

Задача 16. Диагоналът на правилна четириъгълна призма е $\sqrt{34}\,cm$, а диагоналът на основата ѝ е $3\sqrt{2}\,cm$. Да се намери обемът на призмата.

Решения

Решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев» 22.07.2005

Задача 1.

$$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + 2 = \frac{\sqrt{6}-2}{3-2} + 2 = \sqrt{6}$$

Задача 2.

$$\left(5^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}} : \frac{|-5|^0 \cdot \sqrt{5}}{5^{-1/2}} = \left(5^{\sqrt[3]{8}}\right) : \frac{1 \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{1/2}}{1} = 5^2 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Задача 3. Допустими стойности за променливата: ДС: $x \neq 2$, $x \neq -\frac{2}{3}$.

$$\frac{x+5}{3x+2} - \frac{x+6}{x-2} = \frac{x^2+x+5}{(x-2)(3x+2)} \Rightarrow (x+5)(x-2) - (x+6)(3x+2) = x^2+x+5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \in \text{ДС}$$

Задача 4. Допустими стойности:

$$\text{ДС:} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 5 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5} + \infty\right) \\ x \geq -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [\sqrt{5}, +\infty)$$

След повдигане на квадрат на двете страни на уравнението, се получава уравнение

$$\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 - 5 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0,$$

с корени

$$x_1 = 3 \in \text{ДС}, x_2 = -2 \notin \text{ДС}.$$

Задача 5. Допустими стойности за променливата

$$\text{ДС:} \quad \left| \begin{array}{l} x - 3 > 0 \\ x - 5 > 0 \\ x^2 - 6x > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x > 3 \\ x > 5 \\ x(x-6) > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in (3, +\infty) \\ x \in (5, +\infty) \\ x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (6, +\infty)$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\log_2(x-3)(x-5) = \log_2(x^2-6x) \Leftrightarrow (x-3)(x-5) = x^2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = x^2 - 6x \Leftrightarrow 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \in \text{ДС}$$

Задача 6. От свойствата на показателната функция:

$$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0.$$

След полагане $3^x = y$, при допустими стойности за новата променлива D_y : $y > 0$, се получава уравнението

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 3 \in \text{ДС} \quad , \quad y_2 = -2 \notin \text{ДС}$$

От полагането $3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$.

Задача 7. Тъй като $|x-4| > 0$ за $\forall x \neq -4$,

$$\frac{x^2+5x-6}{|x+4|} < 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+5x-6<0 \\ x \neq -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-1)(x+6)<0 \\ x \neq -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-6,-4) \cup (-4,1)$$

Задача 8.

$$\left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{5}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ \dfrac{5}{xy} = \dfrac{5}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ xy=6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array} \right. \text{ или } \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right.$$

Задача 9. Като се използва границата $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, след изнасяне пред скоби на x^4, за търсената граница се получава:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+3x^2+1}{5x^4-2x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}\right)} = \frac{2}{5}$$

Задача 10. Първата производна на функцията е:

$$y' = \frac{(2x-1)'(3-x)-(2x-1)(3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2} > 0 \quad \text{за } \forall x \neq 3.$$

Следователно, функцията няма екстремуми и е растяща за всяко $x \neq 3$. Пресмятат се стойностите ѝ в краищата на интервала. Тъй като функцията е растяща в целия интервал, то тя достига най-голямата си стойност в десния край, а най-малката – в левия край на интервала:

$$y_{\text{НМС}} = y(-1) = -\frac{3}{4} \quad , \quad y_{\text{НГС}} = y(2) = 3$$

Задача 11.

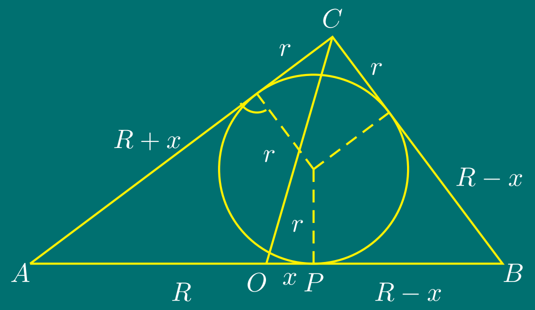
$$\frac{(\cos^2\alpha)^2-(\sin^2\alpha)^2}{(\sqrt{2}\cos\alpha-1)(\sqrt{2}\cos\alpha+1)} = \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{2\cos^2\alpha-1} = \frac{\cos 2\alpha \cdot 1}{\cos 2\alpha} = 1$$

Задача 12.

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$$

Задача 13.



Нека $O\in AB$ е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, $AB=2R=25$.

Нека $OP=x$. По Теоремата на Питагор:

$$AB^2+BC^2=AB^2$$

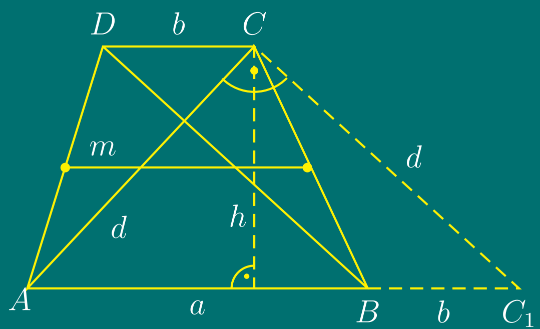
$$\Leftrightarrow (12{,}5+x+3)^2+(12{,}5-x+3)^2=25^2$$

$$\Rightarrow x=8{,}5\,cm.$$

Следователно, за катетите AC и BC се получава:

$$BC=3+12{,}5-8{,}5=7\,cm \quad , \quad AC=3+12{,}5+8{,}5=24\,cm.$$

Задача 14. От условието, че трапецът е равнобедрен следва, че диагоналите му AC и BD са равни.



Построява се права

$$CC_1\parallel BD \text{ и } CC_1\cap \overrightarrow{AB}=C_1.$$

$$CC_1\parallel BD \text{ и } BD\perp AC\Rightarrow CC_1\perp AC.$$

От BC_1CD- успоредник следва, че $BD=C_1C$.

Но $BD=AC\Rightarrow CC_1=AC$, откъдето следва, че $\triangle AC_1C$ - равнобедрен, правоъгълен.

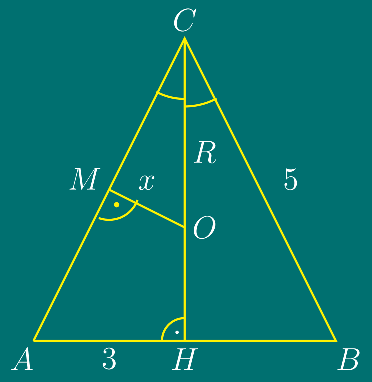
Нека $AB=a$, $CD=b$. Тогава $AC_1=a+b$ и височината на трапеца е

$$h=\frac{AC_1}{2}=\frac{a+b}{2}=m.$$

За лицето на трапеца се получава

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h=m^2=7^2=49\,cm^2$$

Задача 15.



Центърът на описаната окръжност е пресечна точка на симетралите на страните на триъгълника.

MO е симетрала на бедрото AC.

CH е симетрала на основата на $\triangle ABC$- равнобедрен по условие.

Нека търсеното разстояние $MO = x$.

От $\triangle AHC$:

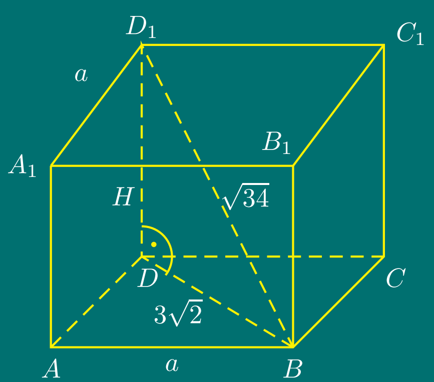
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \Rightarrow \quad CH = \sqrt{25-9} = 4\,cm.$$

От $\triangle AHC \sim \triangle OMC \quad (\angle C$ - общ; $\angle AHC = \angle OMC = 90^o)$

$$\Rightarrow \frac{AH}{OM} = \frac{AC}{OC} = \frac{CH}{CM} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{R} = \frac{4}{2{,}5}$$

$$\Rightarrow R = \frac{5 \cdot 2{,}5}{4} = \frac{25}{8}\,cm\ , \quad x = OM = \frac{7{,}5}{4} = \frac{15}{8}\,cm$$

Задача 16.



Обемът на призмата е

$$V = B \cdot H = a^2 \cdot H.$$

От $\triangle BDD_1$ - правоъгълен

$$\Rightarrow BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$$

$$\Leftrightarrow H^2 = (\sqrt{34})^2 - (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow H = 4\,cm$$

От $ABCD$ - квадрат с диагонал

$$BD = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\,cm.$$

Тогава

$$V = a^2 \cdot H = 3^2 \cdot 4 = 36\,cm^2$$

ТЕМА 20

Тема за предварителен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 30.04.2006

Задача 1. Да се пресметне

$$\frac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3}\ , \text{ ако } \frac{a+b}{a-b}=5\ .$$

Задача 2. Вярно ли е неравенството

$$6-\sqrt{3}>3\sqrt{2}\ ?$$

Да се намерят решенията на уравненията и неравенствата:

Задача 3.

$$\sqrt{2x^2+3x-2}=x+2\ .$$

Задача 4.

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}<-1\ .$$

Задача 5.

$$\log_2(x+3)=4\log_4 x+1\ .$$

Задача 6.

$$3^{x^2-4x+3}\leq 1\ .$$

Задача 7.

$$2\cos^2 x+\sin x=2\ .$$

Задача 8. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sqrt{x}-1}\ .$$

Задача 9. Да се намерят първият член и частното на геометрична прогресия, ако сумата на първите три члена е 13, а разликата между четвъртия и първия членове е 26.

Задача 10. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^3-3x^2+5$ в интервала $x\in[-2,3]$.

Задача 11. Да се докаже тъждеството:

$$\sin 4\alpha+\frac{\cos 4\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\ .$$

Задача 12. Катетите на правоъгълен триъгълник ABC са $AC=15\,cm$ и $BC=20\,cm$. Ъглополовящата AL $(L\in BC)$ пресича височината CH $(H\in AB)$ в точка M. Да се намери дължината на отсечката CM.

Задача 13. Правоъгълен трапец с бедро $10\,cm$ е описан около окръжност с радиус $4\ cm$. Да се пресметнат дължините на страните и лицето на трапеца.

Задача 14. Около окръжност с радиус $4\,cm$ е описан триъгълник, чиито страни са в отношение 13 : 14 : 15. Да се намери лицето на триъгълника.

Задача 15. Всички ръбове на правилна четириъгълна пирамида са равни на a. Да се намери отношението между обема и пълната повърхнина на пирамидата.

Задача 16. Даден е кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $AB=2\,cm$. Да се намери радиусът на кълбото, вписано в тетраедъра ACB_1D_1.

Решения

Кратки решения на темата от предварителен кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 30.04.2006

Задача 1. От условието

$$\frac{a+b}{a-b}=5 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a+b=5(a-b) \\ a\neq b \end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$$

Тогава за дадения израз, след разделяне на числителя и знаменателя на b^3, $b\neq 0$, се получава:

$$A=\frac{\dfrac{a^2b+ab^2}{b^3}}{\dfrac{a^3+b^3}{b^3}}=\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+1}=\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3+1}=\frac{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{27}{8}+1}=\frac{6}{7}$$

Задача 2. Двете страни на неравенството се повдигат на втора степен и след преобразувания се получава:

$$(6-\sqrt{3})^2>(3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 36-12\sqrt{3}+3>18 \Leftrightarrow 21>12\sqrt{3} \Leftrightarrow 7>4\sqrt{3} \Leftrightarrow 49>48,$$

откъдето следва, че даденото неравенство също е вярно.

Задача 3. Определя се множеството от допустими стойности на променливата x:

$$\text{ДС:} \quad \left|\begin{array}{l} 2x^2+3x-2\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2(x-\frac{1}{2})(x+2)\geq 0 \\ x\geq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-2\}\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Двете страни на даденото ирационално уравнение се повдигат на втора степен:

$$\sqrt{2x^2+3x-2}=x+2 \Rightarrow 2x^2+3x-2=(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-2, x_2=3\in \text{ДС}$$

Следователно решенията са: $x_1=-2, x_2=3$.

Задача 4. ДС: $x\neq\pm 1$

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}+1<0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}<0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (x-2)(x+1)<0 \\ x\neq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(1,2)$$

Задача 5. Допустими стойности:

$$\text{ДС:} \left|\begin{array}{l} x+3>0 \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$$

От свойствата на логаритмичната функция:

$$\log_2(x+3) = 4\log_{2^2} x + \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = \frac{4}{2}\log_2 x + \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = \log_2 x^2 + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+3) = \log_2\left(2x^2\right) \Leftrightarrow x+3 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

Полученото квадратно уравнение има корени

$$x_1 = -1 \notin \text{ДС} \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2} \in \text{ДС}.$$

Следователно, решението е $x = 3/2$.

Задача 6. От свойствата на показателната функция ($a = 3 > 1$)

$$3^{x^2-4x+3} \le 3^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0.$$

Квадратният тричлен $x^2 - 4x + 3$ има корени 1 и 3 и тъй като коефициентът пред x^2 е $1 > 0$, следва, че квадратният тричлен е неположителен при $x \in [1, 3]$.

Задача 7.

$$2\cos^2 x + \sin x = 2 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 2.$$

Полага се $\sin x = t$ при допустими стойности $D : t \in [-1, 1]$.

$$2(1-t^2) + t = 2 \Leftrightarrow 2 - 2t^2 + t = 2 \Leftrightarrow t(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \in D, t_2 = \frac{1}{2} \in D$$

При $t = 0$ от полагането се получава тригонометричното уравнение $\sin x = 0$ с решения

$$x = s\pi,\ s \in \mathcal{Z},$$

а при $t = 1/2$ се стига до тригонометрично уравнение $\sin x = 1/2$ с решения

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathcal{Z}.$$

Задача 8.

$$-\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}^2-1^2)(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x}-1} = -\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(x^2+x+1) = -2\cdot 3 = -6$$

Задача 9. Нека първият член на геометричната прогресия е a_1, а частното ѝ е q. Тогава

$$\div\ a_1\ ,\ a_1 q\ ,\ a_1 q^2\ , \ldots$$

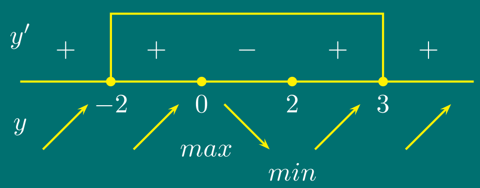
По условие сумата от първите три члена на прогресията е 13, т.е. $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 13$, а разликата на четвъртия и първия член е 26, т.е. $a_1 q^3 - a_1 = 26$. Така се получава следната система за a_1 и q:

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 13 \\ a_1 q^3 - a_1 = 26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1(1+q+q^2) = 13 \\ a_1(q^3-1) = 26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1+q+q^2 = \frac{13}{a_1} \\ a_1(q-1)(q^2+q+1) = 26 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1+q+q^2 = \frac{13}{a_1} \\ a_1(q-1)\frac{13}{a_1} = 26 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1(1+q+q^2) = 13 \\ q-1 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1(1+3+3^2) = 13 \\ q = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{array} \right.$$

Задача 10. Производната на функцията $f(x)$ е $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Решава се уравнението $f'(x) = 0$, откъдето се намират критичните точки:

$$3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$



Намира се втората производна $f''(x) = 6x - 6$ и се пресмятат стойностите ѝ в критичните точки:

$$f''(0) = -6 < 0 \quad , \quad f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0,$$

откъдето следва, че $f(x)$ има максимум при $x = 0$ и минимум при $x = 2$.

Определят се стойностите на функцията в точките на екстремум и в краищата на интервала:

$$f_{max}(0) = 5 \quad , \quad f_{min}(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 5 = 1 \quad , \quad f(-2) = -15 \quad , \quad f(3) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{\text{НМС}} = \min\{f_{min}(2), f(-2)\} = -15\,,\ f_{\text{НГС}} = \max\{f_{max}(0), f(3)\} = \max\{5,5\} = 5.$$

Задача 11. Допустими стойности за α са

$$\alpha \neq (2\text{к}+1)\frac{\pi}{4} \quad , \quad \alpha \neq (2\text{к}+1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathcal{Z}.$$

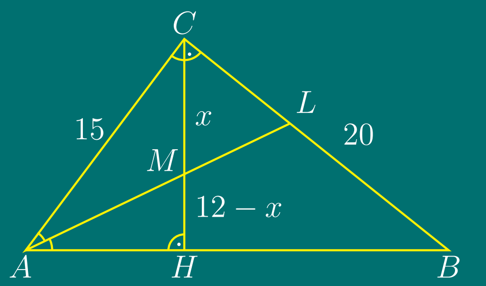
Като се използват се формулите

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad , \quad \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \quad , \quad \cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha,$$

за тъждеството се получава:

$$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$
$$= \frac{2\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

Задача 12.



По Теоремата на Питагор за $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow AB^2 = 15^2 + 20^2,$$

следователно $AB = 25$.

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150\,cm^2.$$

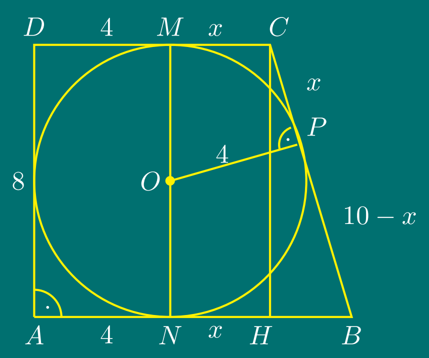
От $\quad S = \dfrac{CH \cdot AB}{2} \Rightarrow 150 = \dfrac{CH \cdot 25}{2} \Leftrightarrow 300 = CH \cdot 25 \Rightarrow CH = 12\,cm$

От $\quad \triangle AHC \ : \quad AH^2 = AC^2 - CH^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow AH = 9\,cm$

От свойството на ъглополовящата AM за $\triangle AHC$:

$$\frac{CM}{MH} = \frac{CA}{AH} \Leftrightarrow \frac{x}{12 - x} = \frac{15}{9} \Leftrightarrow 9x = 15(12 - x) \Leftrightarrow 9x = 180 - 15x \Leftrightarrow x = 7{,}5\,cm$$

Задача 13.



Тъй като трапецът е правоъгълен и е описан около окръжност, то бедрото, което е перпендикулярно на основите е равно на диаметъра на окръжността. Бедрото $BC = 10\,cm$.

Нека N, P, M са допирните точки на окръжността със страните на трапеца AB, BC, CD.

От свойството на допирателните към окръжност:

$$CM = CP = x \quad , \quad BN = BP = 10 - x, \quad (10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10).$$

Построява се височината $CH = 8$ на трапеца. Тъй като $CMNH$ е правоъгълник, то $MC = NH = x$, тогава $HB = 10 - 2x$, $(10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5)$.

От $\triangle HBC$ по Теоремата на Питагор:

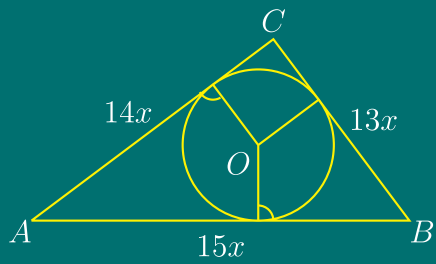
$$BC^2 = HB^2 + HC^2 \Leftrightarrow 10^2 = (10 - 2x)^2 + 8^2 \Leftrightarrow x = 2\,cm.$$

Тогава $AB = 12\,cm, BC = 10\,cm, CD = 6\,cm, AD = 8\,cm$.

Лицето на трапеца е

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{12 + 6}{2} \cdot 8 = 72\,cm^2.$$

Задача 14.



Нека

$$AB = 15x\ ,\ BC = 13x\ ,\ AC = 14x.$$

Определя се лицето на триъгълника по Херонова формула:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

където

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13x+14x+15x}{2} = 21x$$

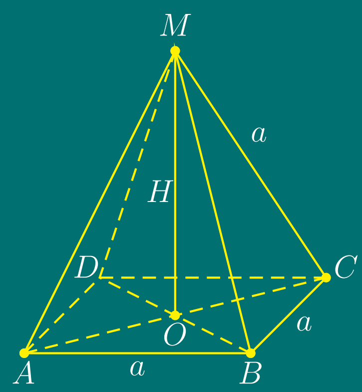
е полупериметърът на триъгълника.

$$S = \sqrt{21x(21x-13x)(21x-14x)(21x-15x)} = \sqrt{21x\cdot 8x\cdot 7x\cdot 6x} = 84x^2$$

От друга страна лицето е

$$S = p\cdot r \Leftrightarrow 84x^2 = 21x\cdot 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow S = 84\,cm^2.$$

Задача 15.



$ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида, следователно основата ѝ е квадрат. Обемът и се пресмята по формулата $V = \frac{1}{3}BH$. От $\triangle AOM$ - правоъгълен:

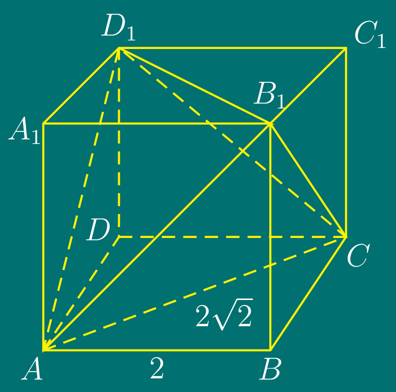
$$OM^2 = AM^2 - AO^2 \Leftrightarrow H^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

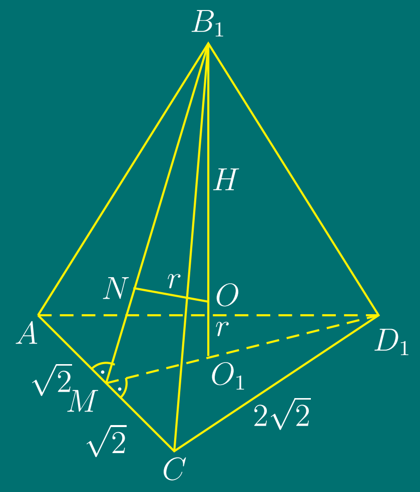
$$\Rightarrow H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow V = \frac{1}{3}\ B\cdot H = \frac{1}{3}\,a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$S_1 = B + 4\cdot S_{ABM} = a^2 + 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(\sqrt{3}+1)$$

$$\frac{V}{S_1} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{12}$$

Задача 16.





Ръбовете на тетраедъра ACD_1B_1 са равни диагонали на стените на куба, следователно тетраедърът е правилен с ръб $2\sqrt{2}$.

От равностранния $\triangle ACD_1$:

$$MO_1 = \frac{1}{3}MD_1 = \frac{1}{3}\sqrt{CD_1^2 - MC^2} = \frac{1}{3}\sqrt{8-2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

От равностранния $\triangle ACB_1 \Rightarrow MB_1 = \sqrt{6}$. От правоъгълния $\triangle MO_1B_1$:

$$O_1B_1 = \sqrt{MB_1^2 - MO_1^2} = \sqrt{6 - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

От $\triangle MO_1B_1 \sim \triangle ONB_1$:

$$\frac{MO_1}{ON} = \frac{O_1B_1}{NB_1} \Rightarrow ON = r = \frac{MO_1 \cdot NB_1}{O_1B_1}.$$

Но $MN = MO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ като допирателни към окръжност и

$$NB_1 = B_1M - MN = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow r = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}}{\frac{4}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ТЕМА 21

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 14.07.2006

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза

$$A=(2ab-a^2-b^2):\frac{a-b}{a+b}\quad \text{при}\quad a=\sqrt{6}\quad \text{и}\quad b=\sqrt{7}.$$

Задача 2. Да се реши уравнението

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{2-x}=\frac{4-x^2+2x}{x^2-3x+2}.$$

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$49^x-6\cdot 7^x+5=0.$$

Задача 4. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}\ .$$

Задача 5. Да се реши уравнението:

$$\lg 10^{\lg(x^2-24)}-1=\lg x\ .$$

Задача 6. Да се намери най-голямата цяла стойност на x, за която

$$\frac{x+3}{x^2+1}\geq 1\ .$$

Задача 7. За аритметичната прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$ са дадени: $a_8 = 11{,}2$ и $a_{15} = 19{,}6$. Да се пресметнат a_1, разликата d и броят на членовете, които са по-малки от 30.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$$

е изпълнено за всяко реално число x.

Задача 9. Да се реши уравнението

$$\cos 2x + \sin x = 0\ .$$

Задача 10. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\ .$$

Задача 11. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad \text{в интервала} \quad x \in \left[\frac{5}{2}, 6\right]\ .$$

Задача 12. В триъгълника ABC отсечките AM и BN са ъглополовящи ($M \in BC$, $N \in CA$), а O е пресечната им точка, като точките C, N, O, M лежат на една окръжност. Да се докаже, че ъгъл ACB е равен на 60^o и, ако $AC = 8$ и $BC = 5$, да се пресметне AB.

Задача 13. Основите на равнобедрен трапец са $a = 8$ и $b = 2$, а бедрото му е $c = 5$. Да се пресметнат лицето на трапеца и радиусът на описаната около него окръжност.

Задача 14. От всички правоъгълници с даден периметър $2p$ да се намери този, който има най-голямо лице. Да се пресметнат страните му.

Задача 15. Дадена е правилна триъгълна пирамида с височина, равна на 4, и радиус на вписаната в основата окръжност, равен на 3. Да се пресметне обемът на пирамидата и дължината на перпендикуляра, спуснат от връх на основата към срещуположната му околна стена.

Задача 16. Права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има за основа ромб $ABCD$ с остър ъгъл α, където $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, и радиус $r = 1$ на вписаната в него окръжност. Ако $\angle CAC_1 = 30^o$, да се пресметне обемът на призмата.

Решения

Решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев» 14.07.2006

Задача 1.

$$A=(2ab-a^2-b^2):\frac{a-b}{a+b}=-(a-b)^2\cdot\frac{a+b}{a-b}=-(a^2-b^2)=b^2-a^2=\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2=7-6=1$$

Задача 2. Допустими стойности за променливата: ДС: $x\neq 1$, $x\neq 2$.

$$\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{4-x^2+2x}{(x-1)(x-2)}\Rightarrow 3x-6+4x-4=4-x^2+2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-14=0\Leftrightarrow x_1=-7\in \text{ДС},\ x_2=2\notin \text{ДС}$$

Задача 3. От свойствата на показателната функция

$$49^x-6\cdot 7^x+5=0\Leftrightarrow (7^x)^2-6\cdot 7^x+5=0.$$

Полага се $7^x=y$, с допустими стойности за новата променлива $D:\ y>0$, в резултат на което се получава квадратно уравнение $y^2-6y+5=0$ с корени $y_1=5\in D$ и $y_2=1\in D$. От полагането

$$7^x=5\Leftrightarrow x_1=\log_7 5\qquad \text{или}\quad 7^x=1\Leftrightarrow 7^x=7^0\Leftrightarrow x_2=0$$

Задача 4. Допустими стойности:

$$\text{ДС:}\quad \left|\begin{array}{l}3x+4\geq 0\\ x-4\geq 0\\ x\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\geq -\frac{4}{3}\\ x\geq 4\\ x\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[4,+\infty)$$

След повдигане на квадрат на двете страни на уравнението, се получава уравнение

$$3x+4+x-4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=4x\Leftrightarrow\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4=0\quad\text{или}\quad x-4=0\ \Leftrightarrow\ x_1=-\frac{4}{3}\notin \text{ДС}\ ,\quad x_2=4\in \text{ДС}.$$

Задача 5. Допустими стойности за променливата

$$\text{ДС:}\quad\left|\begin{array}{l}x^2-24>0\\ x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})>0\\ x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(2\sqrt{3},+\infty)$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\lg(x^2-24)\cdot\lg 10-1=\lg x\Leftrightarrow\lg(x^2-24)=\lg x+\lg 10\Leftrightarrow\lg(x^2-24)=\lg(10x)$$

$$\Leftrightarrow x^2-24=10x \Leftrightarrow x^2-10x-24=0 \;\Leftrightarrow\; x=12\in \text{ДС} \quad , \quad x=-2\notin \text{ДС}$$

Задача 6.

$$\frac{x+3}{x^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2+1}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x+2}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow -x^2+x+2\geq 0,$$

тъй като $x^2+1>0$ за всяко x. След умножаване с (-1) на горното неравенство

$$-x^2+x+2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,2]\,.$$

Следователно, най-голямата цяла стойност на x, за която е вярно даденото неравенство е $x=2$.

Задача 7. Като се използва формулата за общия член на аритметична прогресия,

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

за неизвестните a_1 и d се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} a_1+7d=11{,}2 \\ a_1+14d=19{,}6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -a_1-7d=-11{,}2 \\ a_1+14d=19{,}6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 7d=8{,}4 \\ a_1=11{,}2-7d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} d=1{,}2 \\ a_1=2{,}8 \end{array}\right.$$

Търси се броят n на членовете на аритметичната прогресия, които са по-малки от 30, т.е. тези n, за които

$$a_n=a_1+(n-1)d<30 \Leftrightarrow 2{,}8+(n-1)1{,}2<30 \Leftrightarrow 1{,}2n<28{,}4 \Leftrightarrow n<\frac{71}{3}=23\frac{2}{3}$$

Следователно $n=23$, т.е. двадесет и три члена на прогресията са по-малки от тридесет.

Задача 8. $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ за всяко реално x, когато

$$\left|\begin{array}{l} D<0 \\ a-3>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2-(a-3)(3a-6)<0 \\ a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2a^2-15a+18>0 \\ a>3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2(a-6)\left(a-\frac{3}{2}\right)>0 \\ a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\in(-\infty,\frac{3}{2})\cup(6,+\infty) \\ a\in(3,+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in(6,+\infty)$$

Задача 9. Като се използва формулата

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x,$$

тригонометричното уравнение се преобразува:

$$\cos 2x+\sin x=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sin x=0.$$

Полага се $\sin x=y$, с допустими стойности за новата променлива $D:\ y\in[-1,1]$

$$1-2y^2+y=0 \Leftrightarrow 2y^2-y-1=0 \Leftrightarrow y_1=1\in D\ , \quad y_2=-\frac{1}{2}\in D$$

От полагането:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathcal{Z}$$

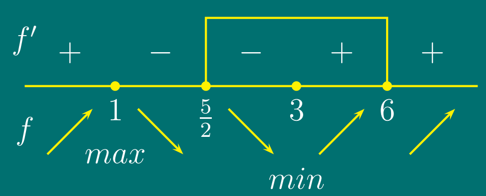
$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2s\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi, \quad s, l \in \mathcal{Z}$$

Задача 10.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x+6-9} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+6}+3) = 3+3=6$$

Задача 11. Първата производна на функцията $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ е $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Решава се уравнението $f'(x) = 0$, т.е. $x^2 - 4x + 3 = 0$, откъдето се намират критичните точки на функцията $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Намира се втората производна $f''(x) = 2x - 4$ и се определят знаците на втората производна в критичните точки: $f''(1) = -2 < 0$, $f''(3) = 2 > 0$. Следователно, функцията $f(x)$ има максимум при $x = 1$ и минимум при $x = 3$. Тъй като само $x = 3$ е от дадения интервал, се намират стойностите на функцията при $x = 3$, $x = 5/2$ и $x = 6$ и се сравняват:

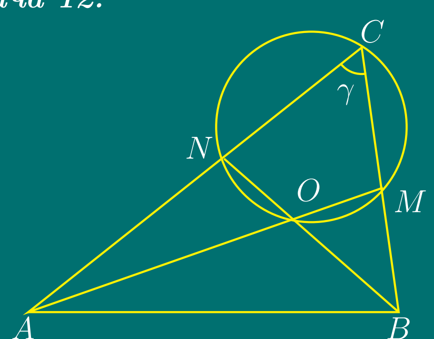


$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{5}{2} + 1 = \frac{29}{24};$$

$$f_{min}(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 18 + 9 + 1 = 1; \qquad f(6) = \frac{1}{3}\cdot 6^3 - 72 + 18 + 1 = 19$$

$$f_{\text{НМС}} = f_{min}(3) = 1 \quad , \quad f_{\text{НГС}} = \max\left\{f\left(\frac{5}{2}\right), f(6)\right\} = \max\left\{\frac{29}{24}, 19\right\} = f(6) = 19$$

Задача 12.



Нека $\angle ACB = \gamma$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

По условие AM и BN са ъглополовящи в $\triangle ABC$,

$$\Rightarrow \angle CAM = \angle MAB = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle CBN = \angle NBA = \frac{\beta}{2}.$$

По условие $M, C, N, O \in k$

$$\Rightarrow \angle NOM + \angle NCM = 180^o \Rightarrow \angle NOM = 180^o - \gamma\,.$$

От друга страна $\angle NOM = \angle AOB$ (връхни ъгли) $\Rightarrow \angle AOB = 180^o - \gamma$.
В $\triangle AOB$:

$$\angle AOB + \angle OAB + \angle ABO = 180^o \Leftrightarrow 180^o - \gamma + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^o \Rightarrow \alpha + \beta = 2\gamma$$

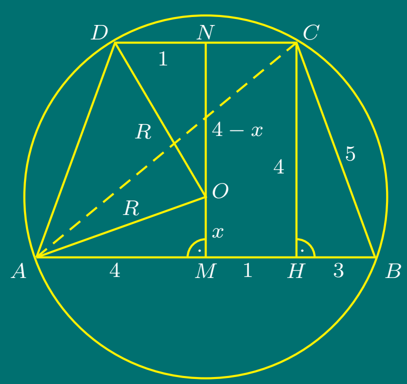
От $\triangle ABC$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 180^o\\ \alpha + \beta = 2\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow 2\gamma + \gamma = 180^o \Rightarrow \gamma = 60^o.$$

По Косинусова теорема за $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \Rightarrow AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow AB = 7.$$

Задача 13.



Първи начин:

Лицето на трапеца е

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

$$AH = \frac{a+b}{2} = \frac{8+2}{2} = 5,$$

$$HB = \frac{a-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3.$$

От $\triangle HBC$:

$$h = CH = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ ед.}$$

Следователно

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20 \text{ кв.ед.}$$

Нека $OM = x \Rightarrow ON = 4 - x$. От $\triangle AMO$:

$$AO^2 = AM^2 + MO^2 \Leftrightarrow R^2 = 4^2 + x^2 \tag{21.1}$$

От $\triangle DNO$:

$$DO^2 = DN^2 + ON^2 \Leftrightarrow R^2 = 1^2 + (4-x)^2 \tag{21.2}$$

От (21.1) и (21.2) се получава уравнение

$$16 + x^2 = 1 + (4 - x)^2 \Leftrightarrow 16 + x^2 = 1 + 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}.$$

Следователно

$$R^2 = 16 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 16 + \frac{1}{64} = \frac{1025}{64} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{41}}{8} \text{ ед.}$$

Втори начин: Лицето на трапеца се определя както по Първи начин. За определяне на радиуса R се използва формулата за равнобедрен трапец с височина h, бедро c и диагонал d, вписан в окръжност с радиус R:

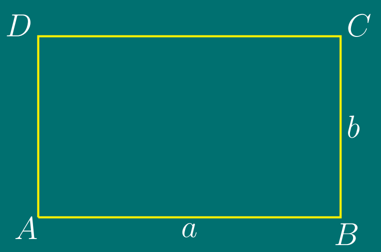
$$\frac{2R}{d} = \frac{c}{h}.$$

$$\triangle HBC \Rightarrow h = CH = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ ед.}$$

$$\triangle AHC \Rightarrow d = AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \text{ ед.}$$

$$\frac{2R}{d} = \frac{c}{h} \Leftrightarrow \frac{2R}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow R = \frac{5\sqrt{41}}{8} \text{ ед.}$$

Задача 14.



Нека страните на правоъгълника са a и b. Тогава периметърът му

$$2p = 2(a + b) \Rightarrow a + b = p \Rightarrow b = p - a.$$

Лицето на правоъгълника се изразява като функция на страната a:

$$S = ab = a(p - a) = pa - a^2 \Rightarrow S(a) = -a^2 + p \cdot a.$$

Изследва се получената функция за екстремуми. Определя се първата производна спрямо a:

$$S'(a) = -2a + p.$$

Решава се уравнението $S'(a) = 0$, от което се определят критичните точки:

$$-2a + p = 0 \Leftrightarrow a = \frac{p}{2}\ .$$

Намира се втората производна и се определя знака ѝ при $a = \frac{p}{2}$:

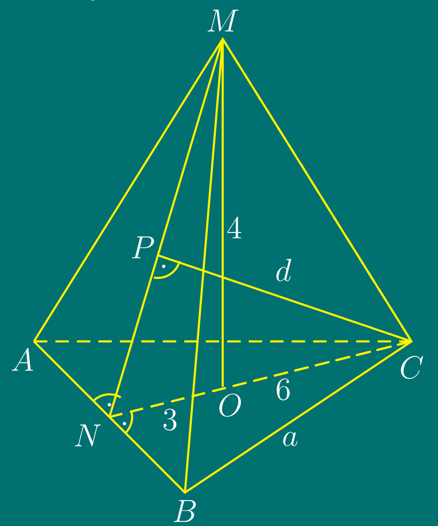
$$S''(a) = -2 < 0 \quad \text{за всяко } a.$$

Следователно, функцията $S(a)$ има максимум при $a = \frac{p}{2}$.

$$S_{max}\left(\frac{p}{2}\right) = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + p\cdot\left(\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{4}.$$

Следователно, от всички правоъгълници с периметър $2p$, най-голямо лице има квадратът със страни $a = b = \frac{p}{2}$.

Задача 15.



Основата на пирамидата е равностранен триъгълник. Върхът на пирамидата се проектира в центъра O на $\triangle ABC$. CN е височина, ъглополовяща и медиана в $\triangle ABC$ и $CO : ON = 2 : 1$ $\Rightarrow r = ON = \frac{1}{3}CN$. Но $r = 3$ по условие $\Rightarrow CN = 9$.

От друга страна

$$CN = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}.$$

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \text{ кв.ед.}$$

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}\cdot 4 = 36\sqrt{3} \text{ куб.ед.}$$

От $\triangle MON$

$$MN^2 = NO^2 + MO^2 \Leftrightarrow MN = \sqrt{16+9} = 5 \text{ ед.}$$

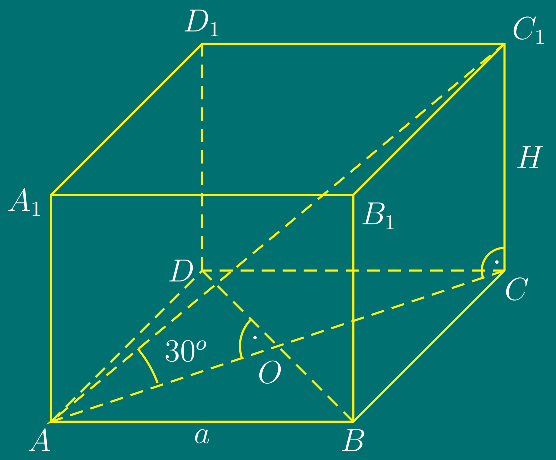
Построява се $CP \perp MN$ и $P \in MN$. Тъй като $CN \perp AB$ и $ON = np_{(ABC)}MN$, по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MN \perp AB$. От друга страна, за двете пресичащи се прави CN и MN от равнината (CNM) е изпълнено: $CN \perp AB$ и $MN \perp AB$, следователно $AB \perp (CNM)$, откъдето следва, че AB е перпендикулярна на всяка права от равнината $(CNM) \Rightarrow AB \perp CP$. Но $CP \perp MN$ по построение, следователно $CP \perp (ABM)$, $\Rightarrow CP$ е разстоянието от върха C до околната стена (ABM).

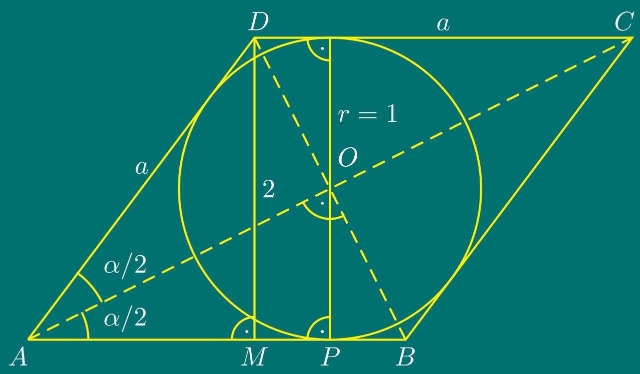
Нека $CP = d$.

От $\triangle NCM$:

$$S_{\triangle NCM} = \frac{CN\cdot MO}{2} = \frac{MN\cdot CP}{2} \Leftrightarrow \frac{9\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot d}{2} \Leftrightarrow d = \frac{36}{5} = 7{,}2 \text{ ед.}$$

Задача 16.





Обемът на призмата е $V = BH$.

От условието $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ $(\alpha < 90^o)$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

Височината $h = DM$ на ромба е равна на диаметъра на вписаната окръжност, т.е. $h = 2$.

От $\triangle AMD$:

$$\frac{DM}{AD} = \sin\alpha \Leftrightarrow AD = \frac{h}{\sin\alpha} \Leftrightarrow a = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

Лицето на ромба

$$B = a^2\sin\alpha = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}\ \text{кв.ед.}$$

В ромба диагоналите са взаимно перпендикулярни и разполовяват ъглите му.

От $\triangle APO$ - правоъгълен

$$\frac{OP}{AO} = \sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow AO = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2\cdot AO = 2\sqrt{3}\ .$$

От $\triangle ACC_1$

$$\frac{CC_1}{AC} = \operatorname{tg} 30^o \Leftrightarrow H = AC \cdot \operatorname{tg} 30^o = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \text{ ед.}$$

За обема на призмата се получава:

$$V = B \cdot H = 3\sqrt{2} \cdot 2 = 6\sqrt{2} \text{ куб.ед.}$$

ТЕМА 22

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 15.07.2006

Задача 1. Дадено е уравнението $kx^2 - (k^2 + 1)x + k = 0$, където $k \neq 0$ е реален параметър.

а) При какви стойности на параметъра k корените x_1 и x_2 на уравнението са реални и положителни?

б) За така намерените стойности на k да се пресметне най-малката стойност на функцията
$$f(k) = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}.$$

Задача 2. Да се реши уравнението
$$\sqrt{16 - x^2} \cdot \left(4 - 2\cos^2 x - 5\sin x\right) = 0.$$

Задача 3. За триъгълник ABC са дадени страната $AC = 13$, ъгълът $ABC = 60^o$ и лицето $S = 30\sqrt{3}$. Да се пресметнат:

а) дължините на страните AB и BC;

б) радиусите на вписаната и описаната окръжности;

в) разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжности.

Задача 4. Основата на пирамида $ABCDM$ е квадратът $ABCD$, а околният ръб DM е перпендикулярен на равнината на основата. Радиусът на вписаната в триъгълника ABM окръжност е $r = 3$, а тангенсът на ъгъл DAM е: $\operatorname{tg}\angle DAM = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

а) Да се пресметне обемът на пирамидата.

б) През точка D е прекарана равнина, която е успоредна на AC и пресича ръба BM в средната му точка N. Да се пресметне лицето на полученото сечение.

Решения

Решения на темата за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 15.07.2006

Задача 1.

а) Корените на уравнението са реални и положителни, когато

$$\left| \begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D = (k^2+1)^2 - 4k^2 = k^4 + 2k^2 + 1 - 4k^2 = (k^2-1)^2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{k^2+1}{k} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{k}{k} = 1 > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (k-1)^2(k+1)^2 \geq 0 \\ k > 0 \\ \forall k \in \mathcal{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall k \in \mathcal{R} \\ k > 0 \\ \forall k \in \mathcal{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow k \in (0, +\infty)$$

б)

$$f(k) = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$$

$$f(k) = \frac{\left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2 - 2\cdot 1}{\sqrt{1}} = \frac{(k^2+1)^2 - 2k^2}{k^2} = \frac{k^4+1}{k^2}$$

Търси се най-малката стойност на функцията

$$f(k) = \frac{k^4+1}{k^2}$$

в интервала $k \in (0, +\infty)$.

Първата производна на $f(k)$ е:

$$f'(k) = \frac{(k^4+1)'k^2 - (k^4+1)(k^2)'}{k^4} = \frac{4k^3\cdot k^2 - (k^4+1)\cdot 2k}{k^4} = \frac{2(k^4-1)}{k^3}.$$

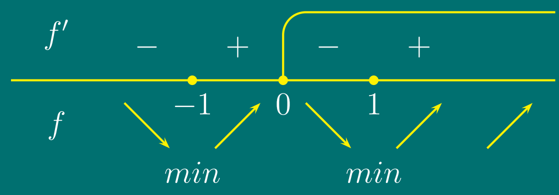
Решава се уравнението $f'(k) = 0$, т.е.

$$\frac{2(k^4-1)}{k^3} = 0 \Leftrightarrow (k^2-1)(k^2+1) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k+1) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \text{ или } k_2 = -1.$$

Следователно, критичните точки на функцията са $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Изследва се знакът на първата производна

$$f'(k) = \frac{2(k-1)(k+1)(k^2+1)}{k^3} \overset{?}{>} 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} k(k-1)(k+1) > 0, \\ k \neq 0. \end{array} \right.$$



Последното неравенство се решава по метода на интервалите, в резултат на което се установява, че в интервала $(0, +\infty)$ функцията има локален минимум при $k = 1$. Следователно, функцията $f(k)$ достига най-малка стойност в интервала $(0, +\infty)$ при $k = 1$ и

$$f_{\text{НМС}}(1) = \frac{1^4 + 1}{1^2} = 2.$$

Задача 2.

$$\text{ДС: } 16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 4].$$

$$\sqrt{16 - x^2}\left(4 - 2\cos^2 x - 5\sin x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2} = 0 \quad \text{или} \quad 4 - 2\cos^2 x - 5\sin x = 0.$$

1. $16 - x^2 = 0$

   $$\Leftrightarrow (4-x)(4+x) = 0 \Leftrightarrow 4-x = 0 \text{ или } 4+x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in \text{ДС} \text{ или } x = -4 \in \text{ДС};$$

2. $4 - 2\cos^2 x - 5\sin x = 0$

   $$\Leftrightarrow 4 - 2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x = 0.$$

   Полага се $\sin x = y$, с допустими стойности $D: \ y \in [-1, 1]$, след което се решава полученото квадратно уравнение

   $$4 - 2(1 - y^2) - 5y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2 \notin D\ ,\ \ y_2 = \frac{1}{2} \in D$$

   От полагането

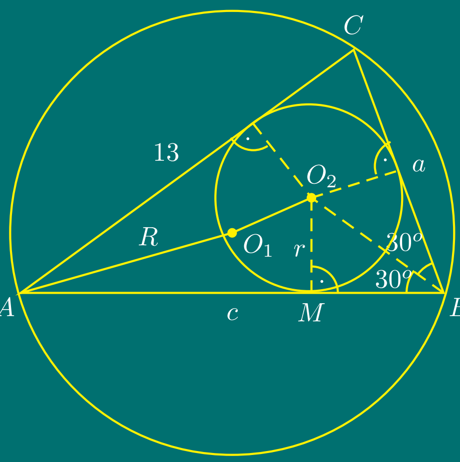
   $$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ , \quad k \in \mathcal{Z}.$$

   Проверява се кои от решенията на тригонометричното уравнение са допустими, т.е. от интервала $[-4, 4]$. Това са $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

Окончателно решенията на даденото уравнение са

$$x_1 = -4 \quad , \quad x_2 = -\frac{7\pi}{6} \quad , \quad x_3 = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x_4 = \frac{5\pi}{6} \quad , \quad x_4 = 4.$$

Задача 3.



Нека O_1 - център на описаната, O_2 - център на вписаната окръжност. Нека $AB = c$, $BC = a$.

а) От Косинусовата теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta$$

$$\Leftrightarrow 13^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 60^o$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = 169.$$

Тъй като по условие $S = 30\sqrt{3}$ кв.ед. и

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ac\sin 60^o = \frac{1}{2}ac\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ac\frac{\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3} \Leftrightarrow ac = 120.$$

Решава се получената система за a и c.

$$\left| \begin{array}{l} a^2 + c^2 - ac = 169 \\ ac = 120 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a+c)^2 - 3ac = 169 \\ ac = 120 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a+c)^2 - 3 \cdot 120 = 169 \\ ac = 120 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a+c)^2 = 529 \\ ac = 120 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + c = 23 \\ ac = 120 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c = 23 - a \\ a(23 - a) = 120 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c = 23 - a \\ a^2 - 23a + 120 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 23\,\text{ед.} \\ c = 8\,\text{ед.} \end{array} \right. \bigvee \left| \begin{array}{l} a = 8\,\text{ед.} \\ c = 23\,\text{ед.} \end{array} \right.$$

б) Полупериметърът $p = (a + b + c)/2 = (8 + 13 + 15)/2 = 18$. От формулата за лице на триъгълник чрез радиусите на вписаната и описана окръжност:

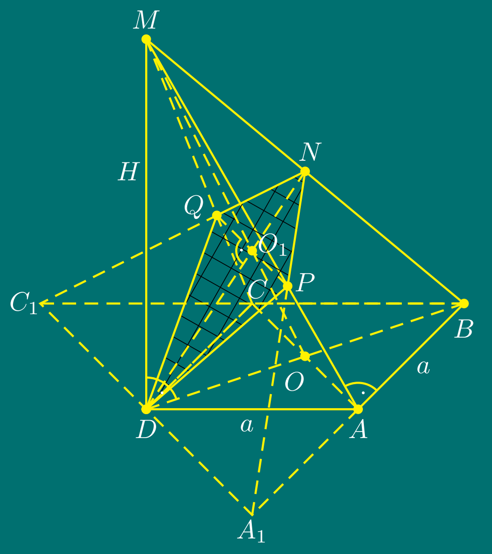
$$S = pr \Leftrightarrow 30\sqrt{3} = 18 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{8 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 30\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

в) От Формулата на Ойлер:

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2Rr} = \sqrt{\left(\frac{13}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{13}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{169}{3} - 2 \cdot \frac{65}{3}} = \sqrt{13}.$$

Задача 4.



По условие околният ръб $MD \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $MD\perp$ на всяка права от равнината (ABC) $\Rightarrow$ $MD \perp AB$, $MD \perp AD$, $MD \perp BD$.

От

$$AD = \text{пр}_{(ABC)} AM \quad \text{и} \quad AD \perp AB$$

по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че $AM \perp AB$. Следователно, $\triangle ABM$ е правоъгълен ($\angle MAB = 90^o$).

Нека

$$DM = H, AB = AD = a, \angle DAM = \alpha.$$

От $\triangle ADM$ - правоъгълен и от условието $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{H}{a} = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow H = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot a.$$

От $\triangle ADM$ по Питагорова теорема

$$\Rightarrow AM^2 = AD^2 + DM^2 \Rightarrow AM = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}a\right)^2} = \frac{4}{3}a\ .$$

От $\triangle BDM$ по Питагорова теорема

$$\Rightarrow BM^2 = BD^2 + DM^2 \Rightarrow BM = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}a\right)^2} = \frac{5}{3}a\ .$$

От $\triangle ABM$ - правоъгълен, с радиус на вписаната окръжност $r = 3$

$$\Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{a + \frac{4}{3}a + \frac{5}{3}a}{2} \Leftrightarrow a = 9\ .$$

Следователно, за височината и обема на пирамидата се получава:

$$H = \frac{\sqrt{7}}{3}a = 3\sqrt{7},$$

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 3\sqrt{7} = 81\sqrt{7} \text{ куб.ед.}$$

б) **Построяване на сечението Ω**

Нека λ е равнината, построена през средата N на BM и $\lambda \parallel AC$. Построява се права $A_1C_1 \parallel AC$ и $D \in A_1C_1$. Правата $A_1C_1 \cap BA^{\rightarrow} = A_1$ и $A_1C_1 \cap BC^{\rightarrow} = C_1$.

$$A_1 \in (ABM), N \in (ABM) \text{ и } A_1N \cap AM = P \Rightarrow PN \in \Omega$$

$$C_1 \in (BCM), N \in (BCM) \text{ и } C_1N \cap CM = Q \Rightarrow QN \in \Omega$$
$$D \in (DCM) \text{ и } Q \in (DCM) \Rightarrow DQ \in \Omega$$
$$D \in (ADM) \text{ и } P \in (ADM) \Rightarrow DP \in \Omega$$

Сечението на λ с пирамидата е четириъгълникът $DPNQ$.

Правата $PQ \parallel AC$ и $AC \perp BD \Rightarrow PQ \perp BD$.

От друга страна $BD = \text{пр}_{(ABC)}ND$, откъдето по Теоремата за трите перпендикуляра следва, че $PQ \perp ND$. Следователно диагоналите на четириъгълника $DPNQ$ са перпендикулярни[1]. Следователно, лицето се намира по формулата:

$$S_\Omega = \frac{DN \cdot PQ}{2}$$

Пресмятане на лицето на Ω

Разглежда се $\triangle DBM$ - правоъгълен. MO и DN са медиани в $\triangle DBM$, следователно $O_1 = MO \cap DN$ е медицентър на $\triangle DBM$ и

$$\frac{MO_1}{O_1O} = \frac{DO_1}{O_1N} = \frac{2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{MO_1}{MO} = \frac{2}{3}.$$

От факта, че DN е медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник $\triangle DBM$
$$\Rightarrow DN = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}a = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 9 = \frac{15}{2}.$$

От $\triangle PQM \sim \triangle ACM$ $(PQ \parallel AC)$

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{MO_1}{MO} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 9\sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

тъй като отношението на страните на подобните триъгълници е равно на отношението на съответните им медиани. Тогава

$$S_\Omega = \frac{DN \cdot PQ}{2} = \frac{\frac{15}{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = \frac{45\sqrt{2}}{2} \text{ кв.ед.}$$

[1] Сечението на пирамидата с равнината λ е делтоид. Докажете го!

ТЕМА 23

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 29.04.2007

Задача 1.Решете уравнението

$$\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = \frac{5}{3}\ .$$

Задача 2. Намерете стойностите на параметъра a, за който квадратното уравнение

$$3x^2 - \sqrt{3}ax + a^2 - 9 = 0$$

има реални корени.

Задача 3. Решете неравенството

$$x \leq \frac{2}{x-1}\ .$$

Задача 4. Решете уравнението

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{20-x} = 1\ .$$

Задача 5. Пресметнете

$$\frac{\lg 45 - \lg 5}{\lg 81 - \lg 3}\ .$$

Задача 6. Решете уравнението

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}\ .$$

Задача 7. Решете уравнението

$$\log_5(x-1) + \log_5(4x+1) = 3\ .$$

Задача 8. Решете уравнението

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0\ .$$

Задача 9. Решете системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 1 \\ x^2 + y^2 - y = 1\ . \end{array}\right.$$

Задача 10. Пресметнете границата

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}\ .$$

Задача 11. Намерете най-малката стойност на функцията

$$y = x^4 - 4x^2 + 1\ .$$

Задача 12. В триъгълник ABC са дадени $AB = 4$, $AC = 3$ и $\cos\gamma = -\frac{1}{4}$, където γ е ъгъл ACB. Намерете дължината на страната BC.

Задача 13. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = 6$, $BC = 5$, и $AC = 4$. Намерете радиусите на вписаната във и описаната около триъгълника окръжности.

Задача 14. Даден е равнобедрен триъгълник с ъгъл α при основата и полупериметър p. Намерете дължината на основата на триъгълника.

Задача 15. Даден е равнобедрен трапец с голяма основа $a = 8$, който е описан около окръжност с радиус $r = 2$. Намерете лицето на трапеца.

Задача 16. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и ъгъл α между околен ръб и основата. Намерете обема на пирамидата.

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 29.04.2007

Задача 1. ДС: $x \neq \pm 2$ НОЗ: $3(x-2)(x+2)$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{3x(x+2) - 3\cdot 8}{3(x-2)(x+2)} = \frac{5(x^2-4)}{3(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \in \text{ДС}, x_2 = 2 \notin \text{ДС}$$

Задача 2. Квадратното уравнение

$$3x^2 - \sqrt{3}ax + a^2 - 9 = 0$$

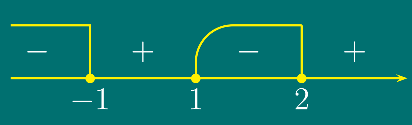
има реални корени за тези стойности на параметъра a, за които $D \geq 0$:

$$D = (\sqrt{3}a)^2 - 12(a^2-9) = 108 - 9a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{3}-a)(2\sqrt{3}+a) \geq 0 \Leftrightarrow a \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$$

Задача 3.

$$x \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-2)(x+1)(x-1) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2].$$



Задача 4.

$$\text{ДС:}\ \left|\begin{array}{l} x+5\geq 0 \\ 20-x\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq -5 \\ x\leq 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-5,20].$$

$$\sqrt{x+5}=1+\sqrt{20-x}\Rightarrow(\sqrt{x+5})^2=(1+\sqrt{20-x})^2\Leftrightarrow x-8=\sqrt{20-x}.$$

Тъй като $\sqrt{20-x}\geq 0$ за $\forall x\in$ ДС, трябва и $x-8\geq 0$, т.е. $x\geq 8$.

Това ново ограничение за x води до стесняване на множеството от допустими стойности ДС: $x\in[8,20]$. След повторно повдигане на двете страни на уравнението на втора степен, се получава уравнение-следствие:

$$(x-8)^2=(\sqrt{20-x})^2\Leftrightarrow x^2-15x+44=0\Leftrightarrow x_1=11\in\text{ДС}, x_2=4\notin\text{ДС}.$$

Задача 5.

$$\frac{\lg 45-\lg 5}{\lg 81-\lg 3}=\frac{\lg\frac{45}{5}}{\lg\frac{81}{3}}=\frac{\lg 9}{\lg 27}=\frac{\lg 3^2}{\lg 3^3}=\frac{2\cdot\lg 3}{3\cdot\lg 3}=\frac{2}{3}\ .$$

Задача 6. $2^x\cdot 2^2-2^x\cdot 2^3-2^x\cdot 2^4=5^x\cdot 5-5^x\cdot 5^2\Leftrightarrow 2^x(4-8-16)=5^x(5-25)$

$$\Leftrightarrow 2^x(-20)=5^x(-20)\Leftrightarrow 2^x=5^x\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^0\Leftrightarrow x=0.$$

Задача 7.

$$\text{ДС:}\ \left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ 4x+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ x>-\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(1,\infty).$$

$$\log_5(x-1)+\log_5(4x+1)=3\cdot\log_5 5\Leftrightarrow\log_5(x-1)(4x+1)=\log_5 5^3$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(4x+1)=125\Leftrightarrow 4x^2-3x-126=0\Leftrightarrow x_1=6\in\text{ДС}, x_2=-\frac{21}{4}\notin\text{ДС}.$$

Задача 8.

$$2\sin^2 x+3\cos x=0\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0.$$

Полага се $\cos x=t$, с допустими стойности $D_t:\ t\in[-1,1]$.

$$2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow t_1=2\notin D_t, t_2=-\frac{1}{2}\in D_t\ .$$

От полагането

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\quad,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Задача 9. След почленно изваждане на двете уравнения, се получава еквивалентна система

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2+x-(x^2+y^2-y)=1-1 \\ x^2+y^2+x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2+y^2+x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y=-x \\ x^2+x^2-x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y=-x \\ 2x^2+x-1=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ y_1=-\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} x_2=-1 \\ y_2=1. \end{array} \right.$$

Задача 10.

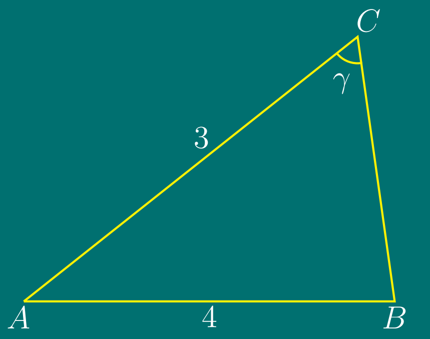
$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}+2\right)=\sqrt{4}+2=4$$

Задача 11. Първата производна на $y=x^4-4x^2+1$ е $y'=4x^3-8x$. Решава се уравнението $y'=0$, т.е. $4x(x^2-2)=0 \Leftrightarrow 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$. Критичните точки са: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$. Втората производна $y''=12x^2-8$. Заместват се критичните точки във втората производна: $y''(0)=-8<0$, $y''(\sqrt{2})=16>0$, $y''(-\sqrt{2})=16>0$, откъдето следва, че функцията има локален минимум при $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$ и локален максимум при $x=0$.

$$y_{\text{НМС}}=\min\left\{y_{min}(-\sqrt{2})\ ,\ y_{min}(\sqrt{2})\right\}=\min\{-3,-3\}=-3.$$

Задача 12.



Нека $BC=x, \quad x>0$.

От Косинусова теорема за $\triangle ABC$

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow 16=9+BC^2-2\cdot 3\cdot BC\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}\cdot x=7 \Leftrightarrow 2x^2+3x-14=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}\notin \text{ДС}\ ,\ x=2\in\text{ДС}. \ \Rightarrow BC=2\,\text{ед}.$$

Задача 13. Определя се лицето на триъгълника по Херонова формула:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

където

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6+5+4}{2}=\frac{15}{2}$$

е полупериметърът на триъгълника.

$$S=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-6\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\ \text{ед}^2.$$

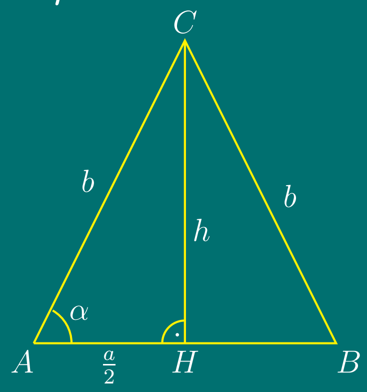
От друга страна лицето на триъгълника е

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{15}{2} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ед.}$$

От формулата за лице на триъгълник чрез радиуса на описаната окръжност

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow \frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot R} \Leftrightarrow R = \frac{8\sqrt{7}}{7} \text{ ед.}$$

Задача 14.



Нека $AC = BC = b$, $AB = a$.

По условие $p = \frac{a}{2} + b$.

От

$$\triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \cos\alpha$$

$$\frac{a/2}{b} = \cos\alpha \Leftrightarrow b = \frac{a}{2\cos\alpha}$$

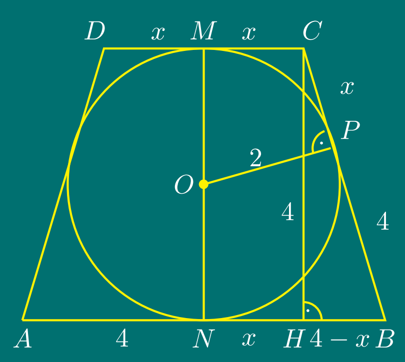
Тогава

$$p = \frac{a}{2} + b \Leftrightarrow p = \frac{a}{2} + \frac{a}{2\cos\alpha} \Leftrightarrow p = \frac{a(1+\cos\alpha)}{2\cos\alpha},$$

откъдето

$$a = \frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{p\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 15.



Нека $CD = 2x$ е малката основа на трапеца.

Тъй като трапецът е равнобедрен и е описан около окръжност, то $h = 2r = 4$ и $BN = BP = 4$, $CP = CM = x$,

$$BH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{8 - 2x}{2} = 4 - x.$$

От $\triangle BHC$ по Теоремата на Питагор:

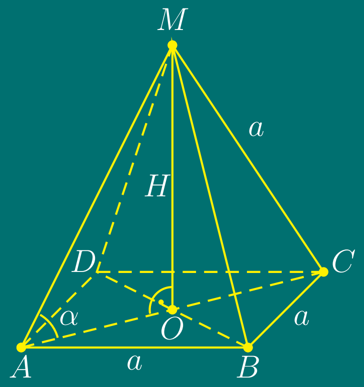
$$BH^2 + HC^2 = BC^2 \Leftrightarrow (4-x)^2 + 4^2 = (4+x)^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Следователно $CD = 2$.

Лицето на трапеца е

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = (AB + CD) \cdot r = (8 + 2) \cdot 2 = 20\,\text{ед}^2.$$

Задача 16.



Основата на пирамидата е квадрат с лице $B = a^2$ и диагонал $AC = a\sqrt{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H.$$

От $\triangle AOM$ - правоъгълен:

$$\frac{OM}{AO} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow H = OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\alpha \text{ ед}^3.$$

ТЕМА 24

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 14.07.2007

Задача 1. Намерете най-голямото от числата $\sqrt{8}$, 2^8 и 8^2.

Задача 2. Намерете положителния корен на уравнението

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Задача 3. Решете уравнението

$$3^{x+1} - 3^x = 6.$$

Задача 4. Решете неравенството

$$\sqrt{x^2 + x + 1} > 1.$$

Задача 5. Решете уравнението

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0\ .$$

Задача 6. Решете неравенството

$$\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 1\ .$$

Задача 7. Решете уравнението

$$\cos^2 x + \cos^2 3x = 1\ .$$

Задача 8. Докажете тъждеството

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x\ .$$

Задача 9. Решете неравенството

$$\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} \leq \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - 1}.$$

Задача 10. Намерете най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$y = x + \frac{1}{x-1}$$

за $x \in [2, 3]$.

Задача 11. За аритметична прогресия е дадено, че $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 40$. Намерете $a_5 + a_9$.

Задача 12. В правоъгълен триъгълник ABC са дадени катетите $AC = 15$, $BC = 20$ и CH е височината към хипотенузата AB. Окръжността с диаметър

BH пресича BC в точка K. Намерете дължината на отсечката HK.

Задача 13. Върху височината CH към основата на равнобедрен триъгълник ABC е избрана точка D, така че триъгълник ABD е равностранен. Намерете дължината на AB, ако $AC = \sqrt{7}$ и $CD = \sqrt{3}$.

Задача 14. В успоредник $ABCD$ са дадени страните $AB = 14$, $AD = 12$ и диагоналът $AC = 16$. Намерете дължината на височината CH към страната AB.

Задача 15. Диагоналите AC и BD на равнобедрен трапец с основа AB се пресичат в точка O под прав ъгъл и $AO = 8$, $DO = 6$. През точка O е прекарана права MN ($M \in AD, N \in BC$), която е перпендикулярна на BC. Намерете дължината на отсечката MN.

Задача 16. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е квадрат $ABCD$ със страна $AB = 4$. Намерете околната повърхнина на пирамидата, ако околният ръб AM е перпендикулярен на равнината $ABCD$ и ъгъл ABM е равен на 30^o.

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 14.07.2007

Задача 1. $2^8 = 256$, $8^2 = 64$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Най-голямото число е 256.

Задача 2. $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$. $D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Положителният корен е 3.

Задача 3.

$$3^{x+1} - 3^x = 6 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3 - 3^x = 6.$$

Полага се $3^x = t$, с допустими стойности $t > 0$. Получава се уравнението

$$3t - t = 6 \Leftrightarrow 2t = 6 \Leftrightarrow t = 3.$$

От полагането $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Задача 4. Квадратният тричлен $x^2 + x + 1 > 0$ за всяко x, защото $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Следователно допустими стойности за x са всички реални числа. Повдигат се двете страни на втора степен:

$$x^2 + x + 1 > 1 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Задача 5.

$$\text{ДС: } \left| \begin{array}{l} x^2 - 3 > 0 \\ 6x - 10 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \\ x > \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty) \\ x > \frac{5}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (\sqrt{3}, +\infty).$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\log_2 \frac{x^2-3}{6x-10} + \log_2 2 = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2(x^2-3)}{6x-10} = \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{6x-10} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6 = 6x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \notin ДС, x_2 = 2 \in ДС.$$

Задача 6. Допустими стойности са тези, за които

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in (x-1)(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

От свойствата на логаритмите $a = 2 > 1$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-2x-2}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{x+3}{x+1} > 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \cap ДС \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

Задача 7. След понижаване на степента на тригонометричните функции

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + \cos 2x + \cos 6x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \text{ или } \cos 2x = 0\ ,$$

откъдето се получават решения

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi\ ; \qquad x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Задача 8.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x+x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 4\cos 2x.$$

Задача 9. Тъй като $x^2 - x + 1 > 0$ за всяко x, защото $D < 0$ и $a = 1 > 0$, то

$$\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1-x+1}{(x-1)(2x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)(2x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x(x-1)(2x-1) \leq 0 \\ x \neq 1, x \neq \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Задача 10. ДС: $x \neq 1$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\ .$$

От уравнението $y' = 0$ се определят критичните точки:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2.$$

Изследва се знакът на y'. Първата производна $y' > 0$ при $x \in [2, 3] \Rightarrow y$ е растяща функция. От тук следва, че

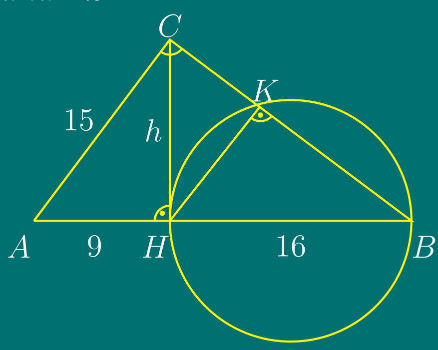
$$y_{\text{нмс}}(2) = 2 + \frac{1}{2-1} = 3 \quad , \quad y_{\text{нгс}}(3) = 3 + \frac{1}{3-1} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Задача 11. От формулата за общия член $a_n = a_1 + (n-1)d$ при $n = 4, 6, 8, 10$ и от даденото условие

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 9d) = 40 \Leftrightarrow 4a_1 + 24d = 40 \Leftrightarrow a_1 + 6d = 10.$$

$$a_5 + a_9 = (a_1 + 4d)(a_1 + 8d) = 2a_1 + 12d = 2(a_1 + 6d) = 2 \cdot 10 = 20.$$

Задача 12.



От $\triangle ABC \Rightarrow$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$$

$$= \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25.$$

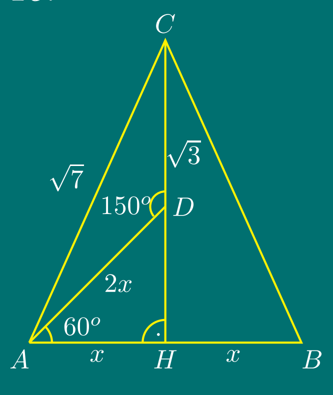
$$2 \cdot S_{\triangle ABC} = AB \cdot CH = AC \cdot BC$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot h = 15 \cdot 20 \Leftrightarrow h = 12.$$

$$\triangle ABC \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \Rightarrow HB = 25 - 9 = 16.$$

$$\triangle HBC \Rightarrow CB \cdot HK = CH \cdot HB \Leftrightarrow 20 \cdot HK = 12 \cdot 16 \Leftrightarrow HK = 9.6 \text{ ед.}$$

Задача 13.



Нека $AH = x$.

По условие $\triangle AHD$ е равностранен, следователно

$$\angle ADH = 30^o\,, \angle ADC = 150^o\,, AD = 2x.$$

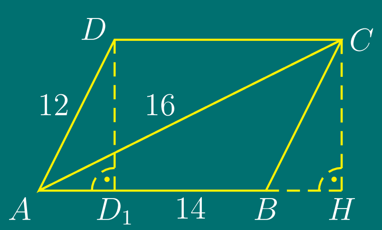
От $\triangle ADC$ по Косинусова теорема

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos(\angle ADC)$$

$$\Leftrightarrow 7 = 4x^2 + 3 - 2\cdot 2x\cdot\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 \notin \text{ДС}, x_2 = \frac{1}{2} \in \text{ДС} \Rightarrow AB = 2x = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \text{ ед.}$$

Задача 14.



По Херонова формула:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

където

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+14+16}{2} = 21$$

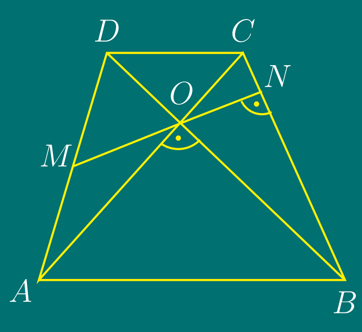
е полупериметърът на триъгълника.

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{21(21-12)(21-14)(21-16)} = \sqrt{21\cdot 9\cdot 7\cdot 5} = 21\sqrt{15}\text{ ед}^2.$$

От друга страна лицето на триъгълника е

$$S_{\text{ABC}} = \frac{AB\cdot CH}{2} = \frac{14\cdot CH}{2} = 7\cdot CH \Rightarrow 7CH = 21\sqrt{15} \Rightarrow CH = 3\sqrt{15}\text{ ед.}$$

Задача 15.



$MN = MO + ON$

$\angle CON = \angle OBN$ (с взаимно перпендикулярни рамене).

$\angle CON = \angle MOA$ (връхни).

$\angle MAO = \angle OBC$ (по условие)

Следователно $\triangle AOM$ е равнобедрен, откъдето следва, че $AM = OM$.

Аналогично

$$\angle OCN = \angle BON \quad , \quad \angle DOM = \angle BON \quad , \quad \angle OCB = \angle ADO$$

Следователно $\triangle DOM$ е равнобедрен $\Rightarrow DM = OM$.

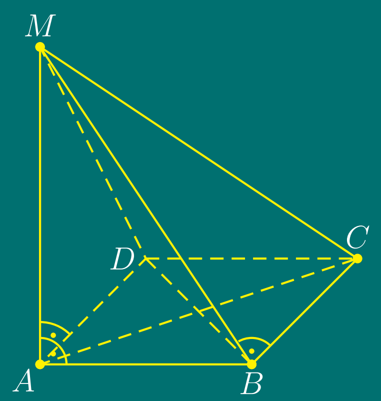
От $AM = OM$, $DM = OM \Rightarrow OM = \frac{1}{2}AD$.

$$\triangle AOD \Rightarrow AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \Rightarrow OM = 5 \text{ ед.}$$

$$\triangle BCO \Rightarrow ON \cdot BC = OB \cdot OC \Leftrightarrow ON = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ ед.}$$

Следователно $MN = OM + ON = 5 + 4.8 = 9.8$ ед.

Задача 16.



По условие $AM \perp (ABC)$, следователно $AM \perp BC$. От $ABCD$ - квадрат следва, че $AB \perp BC$.

Следователно $BC \perp (ABM)$, откъдето $BC \perp BM \Rightarrow \triangle BCM$ е правоъгълен.

По условие $AM \perp (ABC)$, откъдето $AM \perp AB, AM \perp AD$. Следователно $\triangle ABM$ и $\triangle ADM$ са правоъгълни.

От $\triangle ABM$–правоъгълен и $\angle ABM = 30^o \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BM$.

Нека $AM = x$. По Теоремата на Питагор

$$AB^2 + AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow 4^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{4}{3}\sqrt{3}\ ,\ BM = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$$S_{\text{ок.п.}} = 2(S_{\text{ABM}} + S_{\text{BCM}}) = 2\left(\frac{AB \cdot AM}{2} + \frac{BC \cdot BM}{2}\right) = 4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3} \text{ ед}^2.$$

ТЕМА 25

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 15.07.2007

Задача 1.

(а) Намерете отрицателния корен на уравнението $x^2 - 3x - 10 = 0$;

(б) Решете уравнението $4^x - 2^x = 12$;

(в) Решете неравенството

$$\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) > 1.$$

Задача 2. Дадено е уравнението

$$ax^2 + 2(a-6)x + a = 0,$$

където $a \neq 0$ е реален параметър, а x_1 и x_2 са корени на уравнението.

(а) Намерете стойностите на a, за които изразът $x_1^2 + x_2^2$ има най-малка стойност;

(б) Намерете стойностите на a, за които x_1 и x_2 са различни положителни числа.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC със страна $AB = 4$, $\angle ABC = 45^o$ и $\angle BAC = 60^o$.

(а) Намерете радиуса на описаната около триъгълника окръжност;

(б) Измежду всички вписани в триъгълника ABC правоъгълници, двата върха на които лежат на страната AB, намерете страните на този, който има най-голямо лице.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с дължина на основен ръб 2 и двустенен ъгъл между околна стена и основата 30°. През основен ръб на пирамидата е прекарана равнина, която сключва с равнината на основата ъгъл 15°. Намерете лицето на сечението на пирамидата с равнината.

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 15.07.2007

Задача 1.

(а) $D = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 = 7^2$,

$$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \quad ; \quad x_2 = \frac{3-7}{2} = -2.$$

Отрицателният корен е $x = -2$.

(б)

$$4^x - 2^x = 12 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0.$$

Полага се $2^x = t$ с допустими стойности за новата променлива ДС: $t > 0$.

Квадратното уравнение $t^2 - t - 12 = 0$ има корени $t_1 = 4 \in \text{ДС}, t_2 = -3 \notin \text{ДС}$.

От полагането $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

(в)

$$\text{ДС: } \frac{2x+3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (2x+3)(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (-1, +\infty).$$

$$\log_2 \frac{2x+3}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{2x+3}{x+1} > \log_2 2 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-2x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$$

Окончателно: $x \in \text{ДС} \cap (-1, \infty) = (-1, \infty)$.

Задача 2.

$ax^2 + 2(a-6)x + a = 0 \quad , \quad a \neq 0.$

(а) Корените са реални при $D = (a-6)^2 - a^2 = 12(3-a) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 3$.

$$f(a) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2.$$

От формулите на Виет

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(a-6)}{a} \quad ; \quad x_1x_2 = \frac{a}{a} = 1.$$

$$f(a) = \frac{4(a-6)^2}{a^2} - 2 \cdot 1 = 4\left(1 - \frac{6}{a}\right)^2 - 2 \geq -2.$$

Равенство се достига при $a = 6$.

$$f'(a) = 8\left(1 - \frac{6}{a}\right)\left(-\frac{6}{a^2}\right)$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{48(a-6)}{a^3} = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

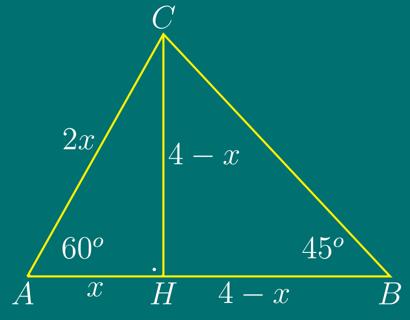
$$f'(a) = \frac{48(a-6)}{a^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{(a-6)}{a^3} > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a(a-6) > 0 \\ a \neq 0 \end{array} \right.$$

В интервала $(-\infty, 3]$, $f(a)$ расте при $a \in (-\infty, 0)$ и намалява при $a \in (0, 3]$. Следователно $f(a)$ достига най-малка стойност при $a = 3$.

(б)

$$\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a-6)^2 - a^2 > 0 \\ \frac{2(6-a)}{a} > 0 \\ 1 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a < 3 \\ a \in (0, 6) \\ a \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow a \in (0, 3)$$

Задача 3.



(а) Нека $AH = x$. От $\triangle HBC$ - равнобедрен, следва че $CH = 4 - x = HB$. От $\triangle AHC \Rightarrow$

$$\angle ACH = 30^o \Rightarrow AC = 2x$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + (4-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 2(\sqrt{3} - 1) \quad \Leftrightarrow AH = 2\sqrt{3} - 2 \ ,$$

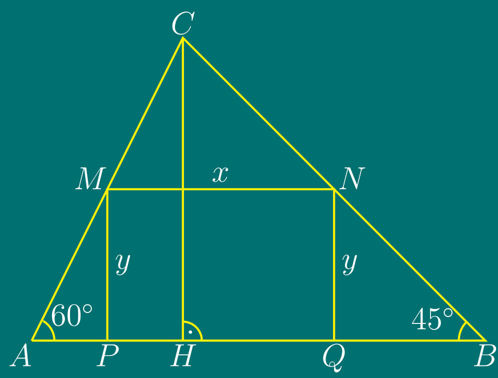
$$BH = 4 - x = 4 - 2\sqrt{3} + 2 = 6 - 2\sqrt{3} \quad , \quad AC = 2(2\sqrt{3} - 2) = 4(\sqrt{3} - 1)$$

По Синусова Теорема

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$\Leftrightarrow R = 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

(б) Нека страните на вписания в триъгълника правоъгълник са x и y.



От $\triangle APM \Rightarrow$

$$\frac{AP}{MP} = \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow \frac{4-x-y}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(4-x-y) = \sqrt{3}y \Leftrightarrow 12-3x-3y = \sqrt{3}y$$

$$\Leftrightarrow 12-3x = y(\sqrt{3}+3) \Leftrightarrow y = \frac{12-3x}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3(4-x)}{(3+\sqrt{3})} \cdot \frac{(3-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})} = \frac{(3-\sqrt{3})(4-x)}{2}$$

За лицето на правоъгълника като функция на x, се получава

$$S(x) = xy = x \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot (4-x) \Leftrightarrow S(x) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}(4x-x^2) \Leftrightarrow$$

$S'(x) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}(4-2x) \Leftrightarrow S'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ - критична точка

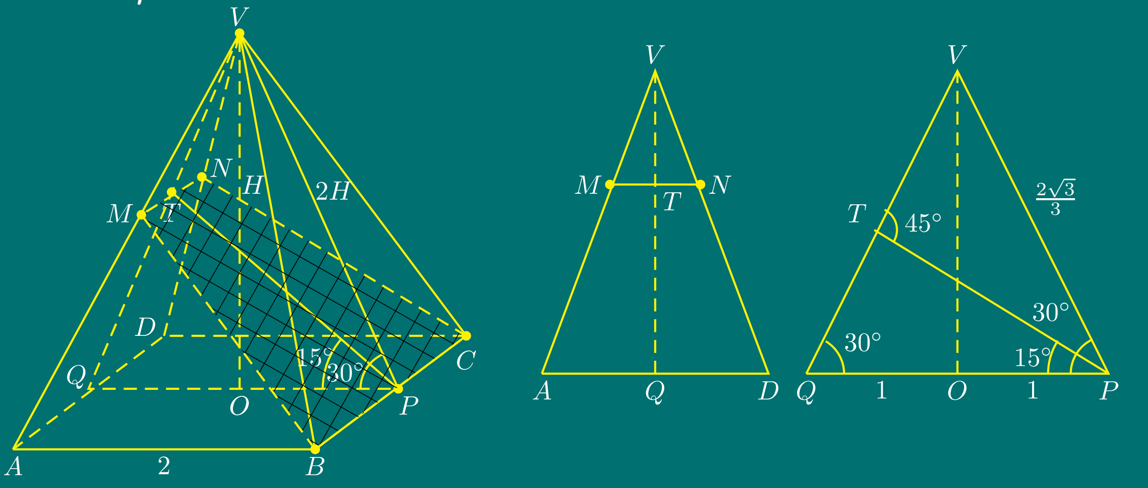
$$S'(x) > 0 \Leftrightarrow 4-2x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$S(x)$ има максимум при $x = 2$, $y = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3-\sqrt{3}$.

Следователно, най-голямо лице има правоъгълник със страни

$$PQ = 2 \quad , \quad QN = 3-\sqrt{3}.$$

Задача 4.



Сечението на пирамидата с равнината е равнобедрен трапец $BCNM$.

От $\triangle OPV \Rightarrow$

$$\frac{H}{OP} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow H = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow VP = 2H = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

PT е ъглополовяща на $\angle OPV$. От $\triangle QPV$-равнобедрен и $\angle QPV = 30^\circ$ следва, че $\angle QVP = 120^\circ$.

От $\triangle PTV$, $\angle TPV = 15^\circ$ и $\angle QVP = 120^\circ$ следва, че $\angle VTP = 45^\circ$.

По Синусова Теорема за $\triangle TPV \Rightarrow$

$$\frac{VP}{\sin 45^\circ} = \frac{TP}{\sin 120^\circ} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{TP}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow TP = \sqrt{2}.$$

От $\triangle QPV$ и TP-ъглополовяща следва, че

$$\frac{VP}{QP} = \frac{VT}{TQ} \Leftrightarrow \frac{VT}{TQ} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{VT}{VQ} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\ .$$

$\triangle MNV \sim \triangle ADV \Rightarrow$

$$\frac{MN}{AD} = \frac{VT}{VQ} \Leftrightarrow MN = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{6} = \sqrt{3}-1$$

За лицето на сечението се получава

$$S_{BCNM} = \frac{BC+MN}{2}\cdot TP = \frac{2+\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2} =$$

$$= \frac{(6+4\sqrt{3})\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{(3+2\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(3+3\sqrt{3})}{6} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\ \text{ед.}^2$$

ТЕМА 26

Тема за кандидатстудентски изпит по математика–тест за РУ «Ангел Кънчев», 11.05.2008

Задача 1. Сборът на две числа е 135. Кои са числата, ако 35% от първото число е равно на 28% от второто число.

Задача 2. Да се реши уравнението

$$\frac{4x^2}{(x-2)^2} - 1 = 24.$$

Задача 3. Да се реши ирационалното уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1.$$

Задача 4. Да се реши показателното уравнение

$$2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} - 4 = 0.$$

Задача 5. Да се реши логаритмичното уравнение

$$\log_2 x + 3\log_x 2 = 4 .$$

Задача 6. Да се реши неравенството

$$\frac{2x+1}{x-5} \leq 3 .$$

Задача 7. Да се реши ирационалното неравенство

$$x - 2 > \sqrt{x+3} .$$

Задача 8. Да се реши тригонометричното уравнение

$$3\sin x = 2\cos^2 x .$$

Задача 9. За кои стойности на реалния параметър a реалните корени x_1 и x_2 на уравнението

$$x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$$

са отрицателни?

Задача 10. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+8} - 3} .$$

Задача 11. За функцията

$$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 4x$$

да се пресметне $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$

Задача 12. Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

в интервала $x \in [0, 2]$.

Задача 13. В правоъгълен триъгълник ABC вписаната окръжност с радиус $r = 1$ се допира до хипотенузата AB в такава точка M, че допирателната AM е равна на 2. Да се пресметнат страните на триъгълника ABC.

Задача 14. Да се пресметне лицето на трапец $ABCD$, ако са дадени основите му $AB = 4$, $CD = 1$ и диагоналите му $AC = 4$, $BD = 3$.

Задача 15. Да се пресметне разликата между обемите на правилен тетраедър с ръб, равен на 1, и на триъгълна пирамида, на която един от основните ръбове е равен на $\sqrt{2}$, а останалите пет ръба са еднакви, равни на 1.

Задача 16. Да се пресметнат телесният диагонал и обемът на правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ако $AC = \sqrt{5}$, $AB_1 = \sqrt{10}$, $AD_1 = \sqrt{13}$.

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика–тест за РУ «Ангел Кънчев» 11.05.2008

Задача 1.

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 135 \\ \frac{35}{100}x = \frac{28}{100}y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x + y = 135 \\ x = \frac{4}{5}y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{4}{5}y + y = 135 \\ x = \frac{4}{5}y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 60 \\ y = 75 \end{array} \right. .$$

Задача 2. ДС: $x \neq 2$

$$\frac{4x^2}{(x-2)^2} - 1 = 24 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} = \pm 5 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-2} = 5 \text{ или } \frac{2x}{x-2} = -5,$$

откъдето се получават решения $x_1 = \frac{10}{3} \in$ ДС и $x_2 = \frac{10}{7} \in$ ДС.

Задача 3.

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [1, 2].$$

Двете страни на уравнението $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{2-x}$ се повдигат на втора степен:

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{2-x} + \left(\sqrt{2-x}\right)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2 - x.$$

Допустимите стойности на променливата за полученото уравнение са $x \leq 2$. Отново се повдига на втора степен:

$$\left(\sqrt{2-x}\right)^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \in \text{ДС}, x_2 = 2 \in \text{ДС}.$$

Задача 4.

$$2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x-2} - \frac{2^{3x-2}}{2} - \frac{2^{3x-2}}{4} = 4.$$

Полага се $2^{3x-2} = y$, $y > 0$, откъдето се получава уравнението

$$y\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4 \Leftrightarrow y = 16.$$

От полагането $2^{3x-2} = 2^4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Задача 5. ДС: $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\log_2 x + 3\log_x 2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 4.$$

След въвеждане на нова променлива $y = \log_2 x$, $y \neq 0$, се получава уравнение

$$y + \frac{3}{y} = 4 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = 3.$$

Тогава, от полагането, за x се получава $\log_2 x = 1$ или $\log_2 x = 3$, откъдето $x_1 = 2 \in$ ДС или $x_2 = 8 \in$ ДС.

Задача 6.

$$\frac{2x+1}{x-5} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-3(x-5)}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{16-x}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (16-x)(x-5) \leq 0 \\ x \neq 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 5) \cup [16, +\infty).$$

Задача 7.

$$\text{ДС:}\left|\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ x+3 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x > 2 \\ x \geq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (2, +\infty).$$

$$(x-2)^2 > (\sqrt{x+3})^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right) \cap \text{ДС} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right)$$

Задача 8.

$$3\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 3\sin x = 2(1 - \sin^2 x).$$

Въвежда се нова променлива $t = \sin x$, такава, че $D_t:\ t \in [-1, 1]$. Получава се квадратно уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$ с решения $t_1 = \frac{1}{2} \in$ ДС или $t_2 = -2 \notin$ ДС.

От полагането, за x се получава тригонометрично уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$, с решения $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, където $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Задача 9.

$$\left|\begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0 \\ -(a+1) < 0 \\ a+1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a+1)(a-3) \geq 0 \\ a > -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \\ a \in (-1, +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in [3, \infty).$$

Задача 10.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)} = 6.$$

Задача 11. $f'(x) = \cos x + 2\cos 2x + 4\cos 4x$. Като се използва, че функцията $\cos\alpha$ е четна, т.е. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot 0 + 4\cdot(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 4.$$

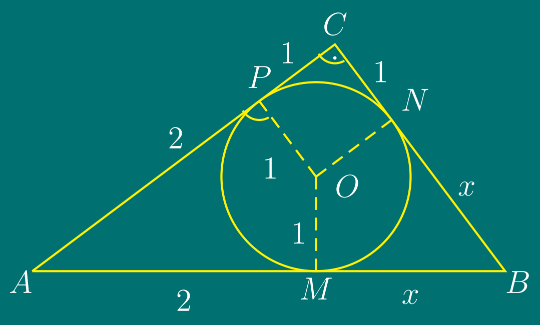
Задача 12. Диференцира се функцията $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ и се определят $f'(x) = -4x + 3$ и $f''(x) = -4$.

Критичните точки на функцията се намират от уравнението $f'(x) = 0$, т.е. $-4x + 3 = 0$, откъдето се получава единствена критична точка $x = \frac{3}{4}$.

Втората производна е отрицателна за всяко x, следователно и за $x = \frac{3}{4}$, откъдето следва, че функцията $f(x)$ има локален максимум за $x = \frac{3}{4}$.

$$f_{\text{нгс}}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{41}{8} = 5\frac{1}{8} \quad , \quad f_{\text{нмс}} = \min\{f(0), f(2)\} = \min\{4, 2\} \Rightarrow f_{\text{нмс}}(2) = 2.$$

Задача 13.



Нека $x = MB$. От свойството на допирателните към окръжност,

$$MB = BN = x,$$

$$NC = CP = 1,$$

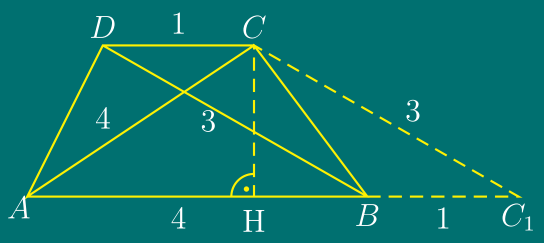
$$AM = AP = 2.$$

Четириъгълникът $ONCP$ е квадрат, тъй като радиусите на вписаната окръжност, построени в точките на допиране, са перпендикулярни на страните.

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = (x+1)^2 + 3^2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Следователно $AB = 2 + x = 5$ ед., $BC = x + 1 = 4$ ед. и $AC = 2 + 1 = 3$ ед.

Задача 14.



Построява се права през върха C, успоредна на диагонала BD, която пресича продължението на основата AB в точка C_1. По построение BC_1CD е успоредник.

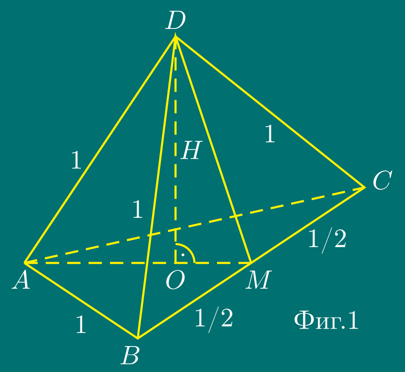
Лицето на трапеца $ABCD$ е равно на лицето на $\triangle AC_1C$:

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH = \frac{AB + BC_1}{2} \cdot CH = \frac{AC_1}{2} \cdot CH = S_{AC_1C}\ .$$

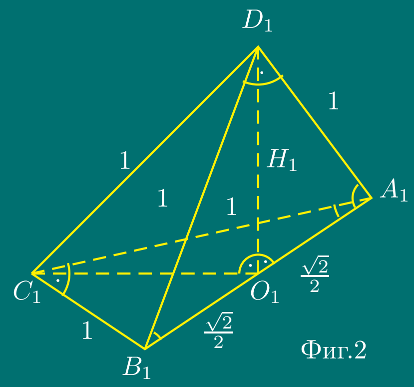
Полупериметърът на $\triangle AC_1C$ е $p = (AC_1 + C_1C + AC)/2 = (5 + 3 + 4)/2 = 6$. Лицето на $\triangle AC_1C$ се намира по Херонова формула:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2} = 6\,\text{ед}^2 \ \Rightarrow S_{ABCD} = 6\,\text{ед}^2.$$

Задача 15.



Фиг.1



Фиг.2

Обемът на правилен тетраедър (Фиг.1) се изчислява при $a = 1$ по формулата

$$V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Две от стените на триъгълната пирамида (Фиг.2) са равнобедрени правоъгълни триъгълници ($1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$).

Нека $D_1O_1 = H_1$ е височината на пирамидата.

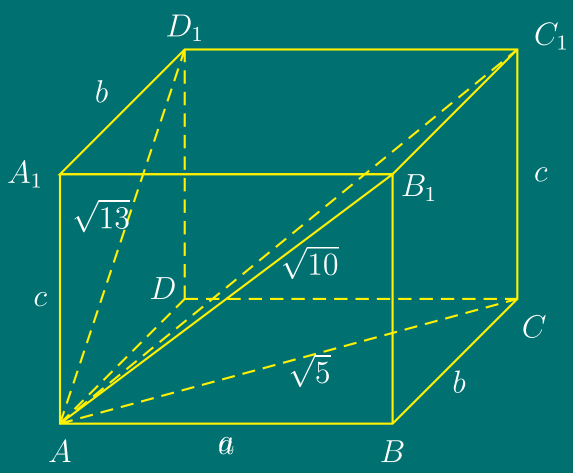
От $\triangle B_1O_1D_1 \cong \triangle C_1O_1D_1 \cong \triangle A_1O_1D_1$ (1. D_1O_1-обща, 2. $B_1D_1 = C_1D_1 = A_1D_1$, 3. $\angle 90°$) следва, че $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$ е радиус на описаната около правоъгълния $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност, т.е. O_1 е среда на хипотенузата A_1B_1.

От $\triangle A_1O_1D_1 \Rightarrow$

$$H_1 = \sqrt{A_1D_1^2 - O_1A_1^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow V_2 = B \cdot \frac{H_1}{3} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{2} \cdot \frac{H_1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{12} = 0.$$

Задача 16.



Нека $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

По Теоремата на Питагор

$$\left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 + c^2 = 10 \\ b^2 + c^2 = 13 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 = 10 - c^2 \\ b^2 = 13 - c^2 \end{array} \right.$$

$$10 - c^2 + 13 - c^2 = 5 \Leftrightarrow c = 3 a = 1, b = 2 \Rightarrow$$

$$V = a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ ед.}^3$$

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{14} \text{ ед.}$$

ТЕМА 27

Тема за кандидатстудентски изпит по математика – тест за РУ «Ангел Кънчев», 18.07.2008

Задача 1. Да се провери верността на неравенството $1+\sqrt{2}<\sqrt{5}$.

Отг. не е вярно

Задача 2. Да се реши уравнението

$$\sqrt{3x+3}-3x=1.$$

Отг. $1/3$

Задача 3. Да се намерят стойностите на x, за които

$$\mid -3 \mid = \mid 2x-3 \mid .$$

Отг. $0, 3$

Задача 4. Да се опрости изразът

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\cdot 2^{2n+3}}{2^{n+2}}.$$

Отг. 2^{n+3}

Задача 5. Да се реши неравенството

$$(x-8)(x+8)-x^2-2x>0.$$

Отг. $x \in (-\infty, -32)$

Задача 6. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{y-1}{x+2} = \frac{1}{3} \end{array} \right. .$$

Отг. $(4, 3)$

Задача 7. Четири числа, първото от които е 9, а последното 243, образуват геометрична прогресия. Да се намерят другите две числа.

Отг. $27, 81$

Задача 8. Да се реши логаритмичното уравнение

$$\lg(4x + 10) - \lg(x + 3) = 2\lg 4 - \lg 8.$$

Отг. $x = -2$

Задача 9. Да се намери най-голямата стойност на функцията

$$y = -x^2 + 6x + 7.$$

Отг. 16

Задача 10. Да се реши уравнението

$$1 + \sin x - \cos 2x = 0.$$

Отг. $k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2m\pi, \frac{7\pi}{6} + 2n\pi; k, m, n \in \mathcal{Z}$

Задача 11. Диагоналите на ромб са с дължини 8 и 6. Да се намери дължината на страната на ромба.

Отг. 5

Задача 12. В равнобедрен трапец са дадени диагонал d и ъгъл α между диагонал и основа. Да се намери лицето на трапеца.

Отг. $\frac{1}{2}d^2 \sin 2\alpha$

Задача 13. В квадрат със страна 8 е вписана окръжност. Да се намери лицето на частта от квадрата, намираща се извън окръжността.

Отг. $16(4 - \pi)$

Задача 14. Даден е успоредник $ABCD$ с лице S. Точка M е произволна вътрешна точка на успоредника. Да се покаже, че

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2}S.$$

Задача 15. В окръжност хордите AB и CD се пресичат в точка M. Да се намери дължината на AB, ако $MC = 30$, $MB = 20$ и $MD = 40$.

Отг. 80

Задача 16. Основата на права призма е равнобедрен трапец с дължини на основите 5 и 1 и остър ъгъл $\alpha = 45°$. Дължината на бедрото е равна на височината на призмата. Да се намери обемът на призмата.

Отг. $12\sqrt{2}$

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика–тест за РУ «Ангел Кънчев», 18.07.2008

Задача 1. След двукратно повдигане на втора степен

$$1 + \sqrt{2} < \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2} + 2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow 2 < 1$$

се получава невярно неравенство. Следователно, даденото неравенство също не е вярно.

Задача 2. $\sqrt{3x+3} - 3x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+3} = 3x + 1$

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} 3x+3 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Повдигат се двете страни на неравенството на втора степен

$$3x + 3 = (3x+1)^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \notin \text{ДС}, x_2 = \frac{1}{3} \in \text{ДС}.$$

Следователно $x = \frac{1}{3}$.

Задача 3.

$$\mid -3 \mid = \mid 2x - 3 \mid \Leftrightarrow 2x - 3 = 3 \quad \text{или} \quad 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ или } x_2 = 0.$$

Задача 4.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}} \cdot 2^{2n+3}}{2^{n+2}} = 1 \cdot \sqrt{2^4} \cdot 2^{2n+3-(n+2)} = 2^2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+3}.$$

Задача 5.

$$(x-8)(x+8) - x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 64 - x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -32).$$

Задача 6.

$$\left| \begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{y-1}{x+2} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2y - 2 \\ 3y - 3 = x + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2y - 2 \\ y - 3 = (2y-2) + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 4 \neq 2 \\ y = 3 \end{array} \right. .$$

Задача 7. Нека x и y са вторият и третият членове на геометричната прогресия. От формулата за общия член, $a_n = a_1 q^n$. Следователно

$$x = 9q \ , \ \ y = 9q^2 \ , \ \ 243 = 9q^3.$$

От последното уравнение

$$q^3 = 27 \Leftrightarrow q = 3.$$

От тук $x = 9 \cdot 3 = 27$, $y = 9 \cdot 3^3 = 81$.

Задача 8. ДС: $x \neq -2$

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} 4x + 10 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x > -\frac{5}{2} \\ x > -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}, \infty\right).$$

От свойствата на логаритмичната функция

$$\lg(4x+10) - \lg(x+3) = 2\lg 4 - \lg 8 \Leftrightarrow \lg \frac{4x+10}{x+3} = \lg \frac{4^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+10}{x+3} = 2 \Leftrightarrow 4x + 10 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = -2 \in \text{ДС}.$$

Задача 9. Първата производна на функцията $y = -x^2 + 6x + 7$ е $y' = -2x + 6$. Решава се уравнението $y' = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ - критична точка. Втората производна $y'' = -2 < 0$, следователно функцията има локален максимум при $x = 3$.

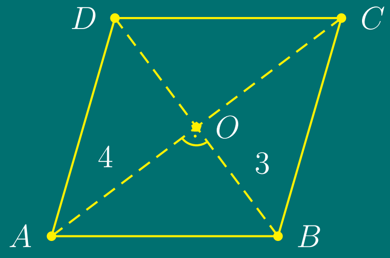
$$y_{max}(3) = y_{\text{НГС}} = 16.$$

Задача 10. $1 + \sin x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 + \sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x + 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 + 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ или } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = k\pi; \ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi; \ x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2s\pi; \ k, l, s = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Задача 11.



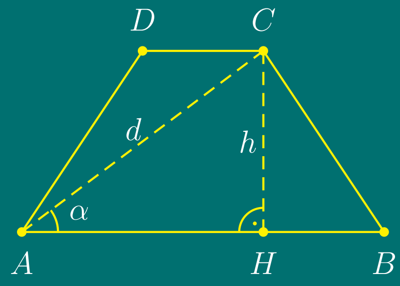
Диагоналите на ромба са перпендикулярни и се разполовяват.

От $\triangle ABO$ по Теоремата на Питагор

$$AB^2 = BO^2 + AO^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow AB = 5.$$

Задача 12.



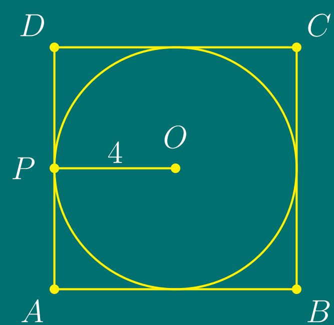
От $\triangle AHC \Rightarrow$

$$AH = \frac{a+b}{2} = d\cos\alpha;$$

$$CH = h = d\sin\alpha.$$

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h = d\cos\alpha\cdot d\sin\alpha = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha.$$

Задача 13.

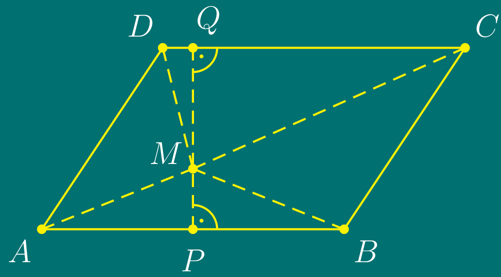


$$S_{\text{кв}} = a^2 = 8^2 = 64 \text{ ед}^2$$

$$S_{\text{кр}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16 \cdot \pi \text{ ед}^2$$

$$S = S_{\text{кв}} - S_{\text{кр}} = 64 - 16\pi = 16(4-\pi) \text{ ед}^2$$

Задача 14.



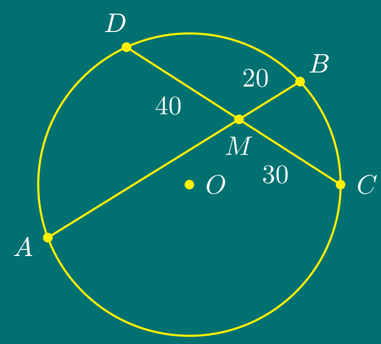
Нека $AB = CD = a$.

Лицето на успоредника $ABCD$ е $S = a \cdot PQ$.

$$S_{ABM} = \frac{AB \cdot MP}{2}\ ;\ S_{CMD} = \frac{CD \cdot MQ}{2}$$

$$S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{a}{2}\cdot MP + \frac{a}{2}\cdot MQ = \frac{a}{2}(MP + MQ) = \frac{a}{2}\cdot PQ = \frac{1}{2}S$$

Задача 15.

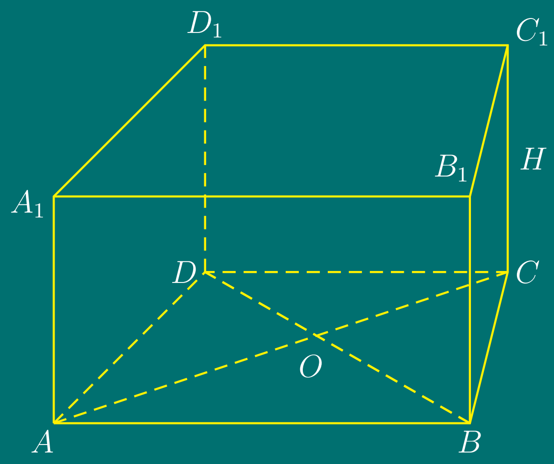


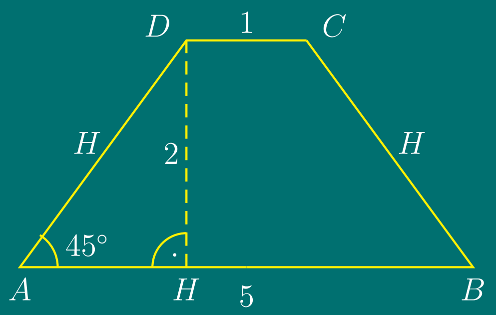
$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{CM \cdot MD}{MB} = \frac{30 \cdot 40}{20} = 60$$

$$\Leftrightarrow AB = AM + MB = 60 + 20 = 80 \text{ ед.}$$

Задача 16.





$$H = AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$B = \frac{AB + CD}{2} \cdot DH = \frac{5+1}{2} \cdot 2 = 6 \text{ ед}^2$$

$$V = B \cdot H = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ ед}^3$$

ТЕМА 28

Тема за кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 19.07.2008

Задача 1. Да се решат уравненията:

а).

$$\frac{8}{x^2-9} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{x-3};$$

Отг. $x = 1$

б).

$$2\log_3(x-3) - \log_3(8-x) = 1.$$

Отг. $x = \frac{3+\sqrt{69}}{2}$

Задача 2.

а). Да се реши неравенството

$$4^{1-x} > 2^{3x^2-3}.$$

Отг. $x \in \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

б). Да се намерят стойностите на параметъра m, за които корените на квадратното уравнение $3x^2 - \sqrt{3}mx + m^2 - 9 = 0$ са отрицателни.

Отг. $m \in [-2\sqrt{3}, -3)$

Задача 3. Лицето на триъгълника $\triangle ABC$ е 84, а най-малката му страна е $AC = 13$. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $R = \frac{65}{8}$.

а). Да се покаже, че $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

б). Да се намерят дължините на другите две страни на триъгълника.

Отг. $14, 15$

Задача 4.

а). Диагоналите на успоредник са с дължини 9 и 7. Периметърът му е 22. Да се намерят страните на успоредника.

Отг. $(4, 7) \vee (7, 4)$;

б). Равнобедрен трапец с голяма основа a и остър ъгъл 2α е описан около окръжност. Да се намери лицето на трапеца.

Отг. $S = \frac{a^2 \sin\alpha}{2\cos^3\alpha}$.

Решения

Кратки решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев» 19.07.2008

Задача 1. **а).** Допустими стойности за променливата: ДС: $x \neq \pm 3$

$$\frac{8}{(x-3)(x+3)} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{x-3} \Rightarrow 8-(x-3)(x-1) = 2(x+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \in \text{ДС}.$$

б). Допустими стойности:

$$\text{ДС:} \quad \left| \begin{array}{l} x-3>0 \\ 8-x>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x>3 \\ x<8 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (3,8)\,.$$

$$2\log_3(x-3) - \log_3(8-x) = \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{(x-3)^2}{8-x} = \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{8-x} = 3 \Leftrightarrow x^2-3x-15=0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{69}}{2} \notin \text{ДС}\;,\; x_2 = \frac{3+\sqrt{69}}{2} \in \text{ДС}.$$

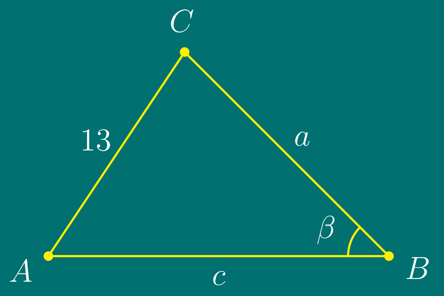
Задача 2. **а).** От свойствата на показателната функция $(a=2>1)$

$$2^{2(1-x)} > 2^{3x^2-3} \Leftrightarrow 3x^2+2x-5<0 \Leftrightarrow 3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-1)<0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{5}{3},1\right).$$

б). $$\left| \begin{array}{l} x_1<0 \\ x_2<0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \geq 0 \\ x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D = 3m^2-12(m^2-9) \geq 0 \\ x_1+x_2 = -\frac{-\sqrt{3}m}{3} < 0 \\ x_1x_2 = \frac{m^2-9}{3} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 9(m^2-12) \leq 0 \\ \frac{\sqrt{3}m}{3} > 0 \\ \frac{m^2-9}{3} > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (m-2\sqrt{3})(m+2\sqrt{3}) \leq 0 \\ m<0 \\ (m-3)(m+3)>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} m \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right] \\ m \in (-\infty,0) \\ m \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow m \in \left[-2\sqrt{3},-3\right)$$

Задача 3.



а). Нека $AB=c$, $BC=a$.

От Синусова теорема за $\triangle ABC$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{\sin\beta} = 2\cdot\frac{65}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

б). От Косинусова теорема за $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\beta \Leftrightarrow 169 = a^2 + c^2 - \frac{6}{5}ac \qquad (28.1)$$

По условие

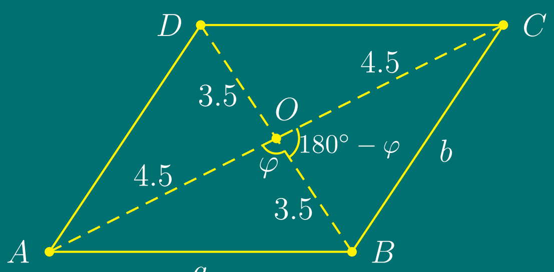
$$S = 84 = \frac{1}{2}ac\sin\beta \Leftrightarrow ac = 210. \qquad (28.2)$$

От (28.1) и (28.2) се получава система уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a^2+c^2-\frac{6}{5}ac = 169 \\ ac = 210 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a^2+c^2 = 421 \\ ac = 210 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a+c)^2-2ac = 421 \\ ac = 210 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a+c = 29 \\ ac = 210 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 29-c \\ ac = 210 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 = 14 \\ c_1 = 15 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} a_2 = 15 \\ c_2 = 14 \end{array}\right. .$$

Задача 4. **а).**



Нека страните на успоредника са $AB = a$ и $BC = b$. По условие

$$P = 22 = 2(a+b) \Rightarrow a+b = 11.$$

Нека ъгълът между диагоналите на успоредника е $\angle AOB = \varphi$.

Прилага се Косинусова теорема за $\triangle ABO$ и $\triangle BCO$.

$\triangle ABO \Rightarrow$

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos\varphi$$
$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\cos\varphi$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - a^2}{2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}} \qquad (28.3)$$

$\triangle BCO \Rightarrow$ $$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2\cdot BO\cdot CO\cdot\cos(180^\circ - \varphi)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot(-\cos\varphi)$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = -\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - a^2}{2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}} \qquad (28.4)$$

От (28.3) и (28.4) следва, че

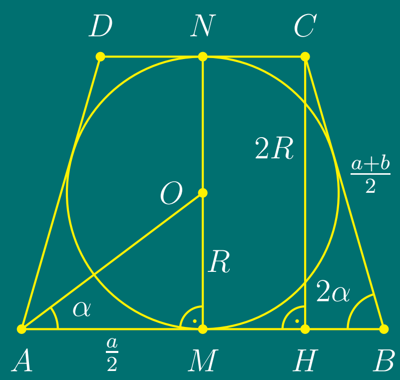
$$\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2-a^2=-\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=65.$$

За страните на успоредника се получава система уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a^2+b^2=65 \\ a+b=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (a+b)^2-2ab=65 \\ a+b=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 121-2ab=65 \\ a+b=11 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ab=28 \\ a+b=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} ab=28 \\ a=11-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1=4 \\ b_1=7 \end{array}\right. \text{ или } \left|\begin{array}{l} a_2=7 \\ b_2=4 \end{array}\right. .$$

б).



Нека основите на трапеца са $AB=a$ и $CD=b$, а бедрата са $BC=AD=c$.

Тъй като трапецът е описан около окръжност, то $a+b=2c$

$$\Rightarrow BC=AD=\frac{a+b}{2}.$$

По условие

$$P=22=2(a+b)\Rightarrow a+b=11.$$

Лицето на трапеца е

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot 2R.$$

От $\triangle ABO \Rightarrow$

$$\frac{OM}{AM}=\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow 2R=a\operatorname{tg}\alpha.$$

От $\triangle HBC \Rightarrow$

$$\frac{CH}{BC}=\sin 2\alpha \Leftrightarrow BC=\frac{2R}{\sin 2\alpha}=\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{a}{2\cos^2\alpha}$$

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot 2R=\frac{a}{2\cos^2\alpha}\cdot a\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos^3\alpha}.$$

ТЕМА 29

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 26.04.2009

Първа част. ***Избираеми отговори***

Задача 1. Дробта

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$$

е равна на:

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{2}{3}$; Г) $\frac{3}{4}$.

Задача 2. Сумата на три числа е 98. Отношението на първото към второто е $\frac{2}{3}$, а отношението на второто към третото число е $\frac{5}{8}$. Второто число е равно на:

А) 15; Б) 30; В) 20; Г) 48.

Задача 3. Сумата от реципрочните стойности на корените на уравнението

$$x^2+px+q=0 \quad , \quad q \neq 0$$

е равна на:

А) $\frac{p}{q}$; Б) $\frac{q}{p}$; В) $-\frac{p}{q}$; Г) $-\frac{q}{p}$.

Задача 4. Броят на решенията на уравнението

$$1+\sqrt{x-3}=\sqrt{4-2x}$$

е равен на:

А) 3; Б) 2; В) 1; Г) 0.

Задача 5. Решенията на уравнението

$$4^{2x-1} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 = 0$$

са:

А) 0; Б) 1; В) 0 и 1; Г) 2.

Задача 6. Решенията на неравенството

$$x^4 + x^2 - 20 \leq 0$$

са:

А) $(0, 2]$; Б) $[-2, 2]$; В) $(-2, 0]$; Г) $[-1, 1]$.

Задача 7. Решенията на неравенството

$$\frac{2}{x} \leq \frac{1}{x+3}$$

са:

А) $(-\infty, -6] \cup (-3, 0)$; Б) $(-\infty, 6]$; В) $(-3, 0]$; Г) $[-2, -1]$.

Задача 8. Решенията на неравенството

$$\log_{\frac{1}{4}} x^2 \geq 1$$

са:

А) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$; Б) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$; В) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; Г) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Задача 9. Радиусът на описаната окръжност около равнобедрен триъгълник с основа 10 и бедро 13 е равен на:

А) 7; Б) $\frac{85}{12}$; В) $\frac{169}{24}$; Г) $\frac{5}{3}$.

Задача 10. В правоъгълния триъгълник ABC ъглополовящата CL на правия ъгъл дели хипотенузата на отсечки $AL = 1$ и $BL = 2$. Лицето на триъгълника ABC е равно на:

А) $\frac{9}{4}$; Б) $\frac{5}{2}$; В) 3; Г) $\frac{9}{5}$.

Втора част. *Свободни отговори*

Задача 11. Дадена е аритметична прогресия с членове: $a_1 = 2x - 3$, $a_2 = 5x - 11$, $a_3 = 3x + 1$ и $a_n = 2009$. Пресметнете номера n.

Задача 12. Намерете решенията на уравнението $3\sin x - \cos 2x = 1$, които принадлежат на затворения интервал $[0, \pi]$.

Задача 13. Намерете екстремумите на функцията $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

Задача 14. През пресечната точка O на диагоналите на правоъгълника $ABCD$ със страни $AB = 8$ и $BC = 6$ е прекарана права, перпендикулярна на диагонала AC, която пресича страната AB в точка M. Пресметнете лицето на триъгълник AOM.

Трета част. *Задача с пълно решение*

Задача 15. Даден е триъгълник ABC с ъгъл $\angle ACB = 60°$ и ъглополовяща на същия ъгъл, равна на $\sqrt{3}$. Ако $BC = x$, да се покаже, че $AC = \frac{x}{x-1}$, $x > 1$. Да се пресметне най-малката стойност на лицето на триъгълника.

Отговори

1. А, **2**. Б, **3**. В, **4**. Г, **5**. В, **6**. Б, **7**. А, **8**. Б, **9**. В, **10**. Г, **11**. 502, **12**. $\pi/6, 5\pi/6$, **13**. $f_{max}(2) = 0$, $f_{min}(4) = -4$, **14**. $\frac{75}{8}$ ед^2, **15**. $S_{min} = \sqrt{3}$.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 26.04.2009

Задача 1.

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

Задача 2.

$$\left| \begin{array}{l} x + y + z = 98 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{y}{z} = \frac{5}{8} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x + y + z = 98 \\ x = \frac{2y}{3} \\ z = \frac{8y}{5} \end{array} \right.$$

След заместване на x и z в първото уравнение на системата, се получава уравнение за y:

$$\frac{2y}{3} + y + \frac{8y}{5} = 98 \Leftrightarrow 10y + 15y + 24y = 98 \cdot 15 \Leftrightarrow 49y = 98 \cdot 15 \Leftrightarrow y = 30.$$

Задача 3. От формулите на Виет за уравнението $x^2 + px + q = 0 \Rightarrow$

$$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 x_2 = q.$$

Сумата от реципрочните стойности на корените е

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{p}{q}.$$

Задача 4. Допустими стойности на променливата са решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} x-3\geq 0 \\ 4-2x\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

Задача 5.

$$4^{2x-1}-5\cdot 4^{x-1}+1=0\Leftrightarrow \frac{4^{2x}}{4}-\frac{5\cdot 4^x}{4}+1=0\Leftrightarrow (4^x)^2-5\cdot 4^x+4=0.$$

След полагане $4^x=y,\ y>0$, се получава квадратно уравнение $y^2-5y+4=0$ с корени $y_1=1>0$, $y_2=4>0$. От полагането $4^x=4^0$ или $4^x=4^1$ се получава $x_1=0$ или $x_2=1$.

Задача 6.

Полага се $x^2=y,\ y\geq 0$. Получава се квадратно неравенство $y^2+y-20\leq 0$.

Корените на квадратния тричлен y^2+y-20 са 4 и (-5), откъдето се получава неравенството

$$(y-4)(y+5)\leq 0\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+5)\leq 0\Leftrightarrow x^2-4\leq 0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)\leq 0,$$

тъй като $x^2+5>0$ за всяко x.

Решения на неравенството $(x-2)(x+2)\leq 0$ са $x\in[-2,2]$.

Задача 7. ДС: $x\neq 0, x\neq -3$.

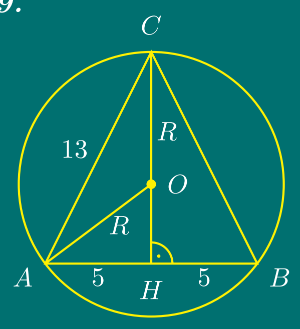
$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}\leq 0\Leftrightarrow \frac{x+6}{x(x+3)}\leq 0\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x(x+6)(x+3)\leq 0 \\ x\neq 0, x\neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6]\cup(-3,0).$$

Задача 8. ДС: $x^2>0$ - вярно за всяко $x\neq 0$. Тъй като $a=\frac{1}{4}\in(0,1)$

$$\log_{\frac{1}{4}}x^2\geq\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{4}\leq 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap \text{ ДС }\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right].$$

Задача 9.



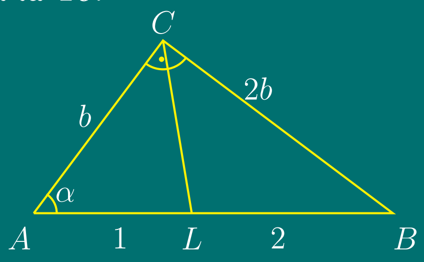
$$\triangle AHC\Rightarrow CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=12.$$

$$S=\frac{abc}{4R}=\frac{13\cdot 13\cdot 10}{4R},$$

$$S=\frac{AB\cdot CH}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=60.$$

$$\Rightarrow\frac{169\cdot 5}{2R}=60\Leftrightarrow R=\frac{169}{24}.$$

Задача 10.



Нека $AC = b$,

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2b.$$

От правоъгълния $\triangle ABC$ по Питагорова Теорема

$$b^2 + (2b)^2 = 9 \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{b \cdot 2b}{2} = b^2 = \frac{9}{5}.$$

Задача 11. Нека членовете на аритметичната прогресия са

$$a_1 = 2x - 3, a_2 = 5x - 11, a_3 = 3x + 1, \ldots, 2009.$$

От свойствата на аритметичната прогресия

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Leftrightarrow 5x - 11 = \frac{(2x-3) + (3x+1)}{2} \Leftrightarrow x = 4,$$

откъдето следва, че $a_1 = 5$, $d = a_2 - a_1 = (5x - 11) - (2x - 3) = 3x - 8 = 4$.

От формулата за общия член на аритметична прогресия:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Leftrightarrow 2009 = 5 + (n-1) \cdot 4 \Leftrightarrow n = 502.$$

Задача 12. Търсят се решенията на $3\sin x - \cos 2x = 1$ за $x \in [0, \pi]$.

От формулата $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ след заместване в уравнението се получава

$$3\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Полага се $\sin x = t$, с допустими стойности за новата променлива $t \in [-1, 1]$. Но тъй като по условие $x \in [0, \pi]$, то $\sin x > 0$, т.е. ДС: $t \in [0, 1]$.

Корените на полученото квадратно уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$ са

$$t_1 = \frac{1}{2} \in \text{ ДС} \quad , \quad t_2 = -\frac{1}{2} \notin \text{ ДС}.$$

От полагането $\sin x = \frac{1}{2}$ се получават решения

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, \ldots \ ,$$

от които в интервала $[0, \pi]$ са $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$.

Задача 13. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$, $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

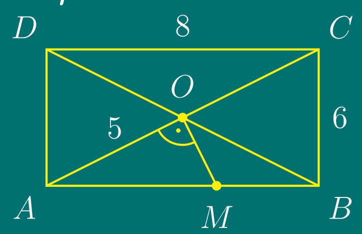
Решава се уравнението $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$, откъдето се намират стационарни точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

Втората производна е $f''(x) = 6x - 18$. Заместват се стационарните точки във втората производна:

$$f''(2) = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow \max \quad , \quad f''(4) = 24 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow \min .$$

$$f_{max}(2) = 0 \quad , \quad f_{min}(4) = -4.$$

Задача 14.



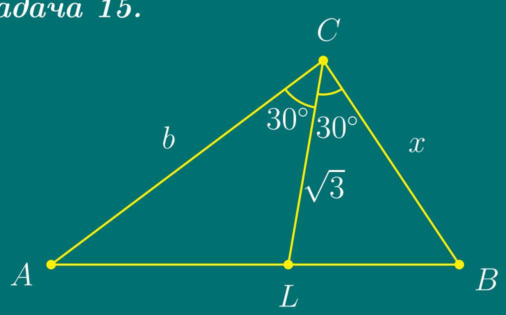
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = 5.$$

$$\triangle AOM \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OM}{BC} \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{OM}{6} \Leftrightarrow OM = \frac{15}{4}.$$

$$S_{\triangle AMO} = \frac{AO \cdot OM}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{75}{8} \text{ ед}^2.$$

Задача 15.



а). $S_{\triangle ALC} + S_{\triangle BLC} = S_{\triangle ABC}$

$$\frac{b \cdot \sqrt{3}\sin 30^\circ}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{3}\sin 30^\circ}{2} = \frac{b \cdot x \sin 60^\circ}{2}$$

$$\frac{b\sqrt{3}}{4} + \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{bx\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow b = \frac{x}{x-1}$$

б).

$$S_{\triangle ABC} = S(x) = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x^2}{x-1} \quad , \quad x > 1.$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Първата производна се анулира за две стойности на x: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. От тях само $x_2 = 2$ удовлетворява условието $x > 1$. Следователно

$$S_{min} = S(2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2^2}{2-1} = \sqrt{3}$$

ТЕМА 30

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 16.07.2009

Първа част. ***Избираеми отговори***

Задача 1. Изразът

$$\sqrt{\frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}-2\sqrt{6} \qquad \text{е равен на:}$$

А) -1; Б) 0; В) $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Задача 2. Числото $\sqrt{5^{16}}$ е равно на:

А) $\left(\sqrt{5^4}\right)^2$; Б) 5^{32}; В) 25^4; Г) 5^4.

Задача 3. Решенията на неравенството

$$x^2(x^2+4)(x+3)\leq 0 \qquad \text{са:}$$

А) $[-3,3]$; Б) $[1,3]$; В) $(-\infty,-3]\cup\{0\}$; Г) $[3,+\infty)$.

Задача 4. Решението на уравнението

$$\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{5x-15}=2(1-2x) \qquad \text{е:}$$

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $\frac{9}{2}$; Г) $x\in\emptyset$.

Задача 5. Решенията на неравенството

$$\frac{2x+3}{2x^2+1}\leq\frac{1}{x-2} \qquad \text{са:}$$

А) $[-8, 3]$; Б) $[-7, 2)$; В) $(-\infty, -8) \cup [3, +\infty)$; Г) $(-\infty, -7] \cup (2, +\infty)$.

Задача 6. Решенията на уравнението

$$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0 \qquad \text{са:}$$

А) $x_1 = 2$; Б) $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$; В) $x_1 = 9$ и $x_2 = -2$; Г) $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Задача 7. Аритметичната прогресия a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 е такава, че $a_3 = -2$. Сумата $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ е:

А) невъзможно да се определи; Б) 8; В) -8; Г) -10.

Задача 8. Точката G е вътрешна за триъгълник ABC, а A_1B_1 ($A_1 \in AC, B_1 \in BC$) и A_2B_2 ($A_2 \in AG, B_2 \in BG$) са средни отсечки съответно за $\triangle ABC$ и $\triangle ABG$. Вярното твърдение е:

А) $A_1B_1 = A_2B_2$; Б) $A_1B_1 = 2A_2B_2$; В) $A_1B_1 = \frac{1}{3}A_2B_2$; Г) $A_1B_1 = \frac{3}{2}A_2B_2$.

Задача 9. Радиусът на описаната около триъгълник ABC окръжност, в който $AB = 16$ см, а $\cos\angle ACB = \frac{3}{5}$, е:

А) 8 см; Б) 10 см; В) 12 см; Г) 9 см.

Задача 10. От 20 изделия 15% са дефектни. Вероятността сред 4 случайно избрани изделия точно 1 да е дефектно е:

А) $\frac{8}{19}$; Б) $\frac{8}{95}$; В) $\frac{4}{95}$; Г) $\frac{4}{19}$.

Втора част. *Свободни отговори*

Задача 11. Кои са общите точки на графиките на функциите

$$f(x) = 4x^2 + \cos 2x \qquad \text{и} \qquad g(x) = (2x - 1)^2 - 2\sin^2 x \ ?$$

Задача 12. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 16x + 6) < 0.$$

Задача 13. Да се намерят решенията на уравнението

$$\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0 \qquad \text{в интервала} \qquad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Задача 14. В равнобедрен трапец с ъгъл при основата 60° е вписана окръжност с радиус $r = 3$. Да се намери лицето на трапеца.

Трета част. *Задача с пълно решение*

Задача 15. В триъгълник ABC две от страните са $AC = 8$ см и $BC = 12$ см, а ъглите $\angle ABC$ и $\angle BAC$ се отнасят както 1:2. Да се намери страната AB.

Отговори

1. Б, **2**. В, **3**. В, **4**. Г, **5**. Г, **6**. А, **7**. Г, **8**. А, **9**. Б, **10**. А, **11**. $(0,1)$, **12**. $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(5,\infty)$, **13**. $\frac{2\pi}{3}$, **14**. $24\sqrt{3}$ ед^2, **15**. 10см.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 16.07.2009

Задача 1.

$$\sqrt{\frac{4}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}-2\sqrt{6}=\sqrt{\frac{4}{\frac{1}{6}}}-2\sqrt{6}=2\sqrt{6}-2\sqrt{6}=0.$$

Задача 2.

$$\sqrt{5^{16}}=5^8=(5^2)^4=25^4.$$

Задача 3.

$$x^2(x^2+4)(x+3)\le 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ или } x<-3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup\{0\}.$$

Задача 4.

$$\text{ДС: }\left|\begin{array}{l}2x-1\ge 0\\ 5x-15\ge 0\\ 1-2x\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\ge 3\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

Задача 5. ДС: $x\ne 2$.

$$\underbrace{\frac{\overset{x-2}{\smile}\,2x+3}{2x^2+1}-\frac{\overset{2x^2+1}{\smile}\,1}{x-2}}_{(2x^2+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2x^2}+3x-4x-6-\cancel{2x^2}-1}{(2x^2+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{(2x^2+1)(x-2)}\le 0$$

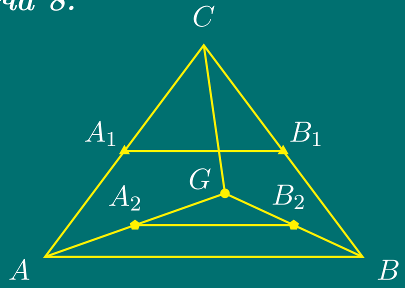
$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(x+7)(x-2)\ge 0\\ x\ne 2\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,-7]\cup(2,\infty).$$

Задача 6. $9^x-7\cdot 3^x-18=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-7\cdot 3^x-18=0$. Полага се $3^x=y>0$. Полученото квадратно уравнение $y^2-7y-18=0$ има корени $y_1=9\in$ ДС, $y_2=-2\notin$ ДС. От $3^x=3^2$ се получава решение $x=2$.

Задача 7. Нека аритметичната прогресия има членове $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$, където по условие $a=-2$. Сумата на първите пет члена на аритметичната прогресия е

$$S_5=(-2-2d)+(-2-d)+(-2)+(-2+d)+(-2+2d)=-10.$$

Задача 8.

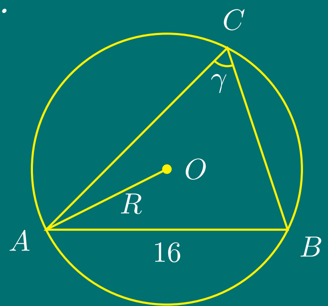


A_1B_1, A_2B_2 - средни отсечки съответно в $\triangle ABC$ и $\triangle ABG$.

$$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB \quad , \quad A_2B_2 = \frac{1}{2}AB$$

$$\Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2.$$

Задача 9.



$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

От Синусова теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R \Leftrightarrow \frac{16}{\frac{4}{5}} = 2R \Leftrightarrow R = 10\,\text{см}.$$

Задача 10. По условие 15% от 20 изделия са дефектни: $15\% \cdot 20 = \frac{15}{100} \cdot 20 = 3$. Избират се по случаен начин 4 изделия. Търси се вероятността на събитието

A $= \{$точно 1 от 4 изтеглени изделия са дефектни$\}$.

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_{17}^3}{C_{20}^4} = \frac{3 \cdot \frac{17\cdot16\cdot15}{3!}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4!}} = \frac{8}{19}.$$

Задача 11. Общите точки на графиките на двете функции се получават за тези стойности на x, за които $4x^2 + \cos 2x = (2x-1)^2 - 2\sin^2 x$.

$$4x^2 + \cos 2x = 4x^2 - 4x + (1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow \cancel{4x^2} + \cancel{\cos 2x} = \cancel{4x^2} - 4x + \cancel{\cos 2x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Стойностите на функциите за $x = 0$ са $f(0) = g(0) = 1$. Следователно, общата точка на двете графики е $(0, 1)$.

Задача 12.

$$\text{ДС: } 3x^2 - 16x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{8 - \sqrt{46}}{3}\right) \cup \left(\frac{8 + \sqrt{46}}{3}, \infty\right).$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 16x + 6) < \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 5 > 0, \text{ защото } a = \frac{1}{3} \in (0, 1).$$

Корените на квадратния тричлен $3x^2 - 16x + 5$ са $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$3x^2 - 16x + 5 > 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 5) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (5, \infty).$$

Окончателно $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (5, \infty) \cap$ ДС $\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (5, \infty)$.

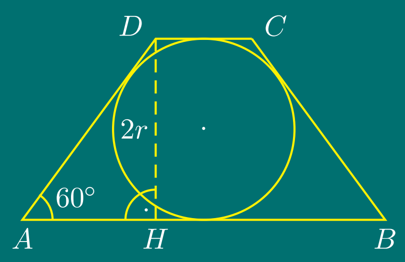
Задача 13. Използва се формулата $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$

Полага се $\cos x = y \in [-1, 1]$. Решенията на полученото квадратно уравнение $2y^2 - 3y - 2 = 0$ са $y_1 = 2 \notin$ ДС и $y_2 = -\frac{1}{2} \in$ ДС.

От полагането $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$. От получените решения, на условието $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ отговаря $x = 2\pi/3$.

Задача 14.



Нека $AB = a$, $DC = b$, $AD = BC = c$. Тъй като трапецът е описан около окръжност с радиус $r = 3$, то $a + b = 2c$. От формулата за лице на трапец

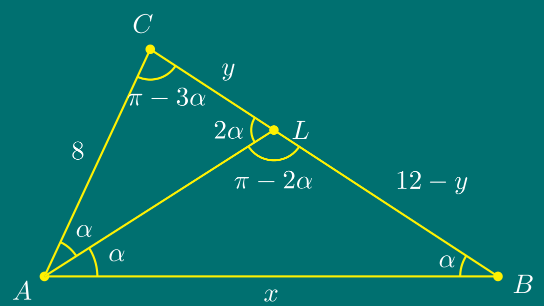
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{2c}{2} \cdot 2r = 2cr$$

От $\triangle AHD \Rightarrow$

$$\frac{DH}{AD} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \frac{6}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c = 4\sqrt{3}.$$

Лицето $S = 2 \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ см^2.

Задача 15.



Дадено: $\triangle ABC$, $AC = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC : \angle BAC = 1 : 2$.

Да се намери: AB

Първи начин: ДС:$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

От Синусова теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{8}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow 8 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 12\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \notin \text{ДС}, \cos\alpha = \frac{3}{4} \in \text{ДС}.$$

От Косинусова теорема $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow 64 = x^2 + 144 - 2x \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10$ см $\in$ ДС, $x_2 = 8 \notin$ ДС.

Втори начин: Построява се ъглополовящата AL. Нека $CL = y$, $LB = 12 - y$. $\triangle ABC \sim \triangle LAC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{LA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{LC} \Leftrightarrow \frac{x}{LA} = \frac{12}{8} = \frac{8}{y} \Rightarrow y = \frac{16}{3}.$$

От свойството на ъглополовящата

$$\frac{CL}{LB} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{y}{12-y} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8(12-y)}{y} = \frac{8(12-\frac{16}{3})}{\frac{16}{3}} = 10\,\text{см}.$$

Трети начин: ДС:$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\sin T \Rightarrow \frac{8}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin(\pi - 3\alpha)} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8\sin 2\alpha = 12\sin\alpha \\ 8\sin 3\alpha = x\sin\alpha \end{array} \right.$$

От първото уравнение

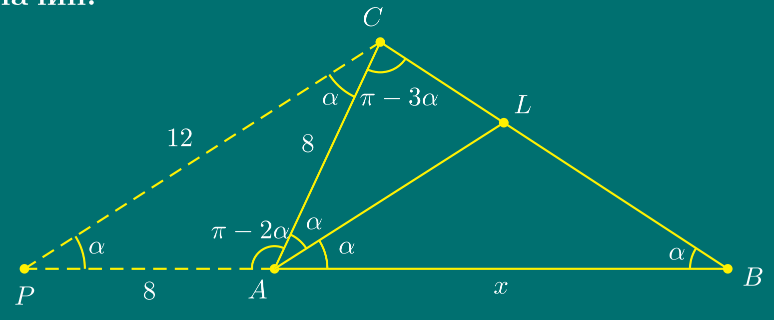
$$2\sin 2\alpha = 3\sin\alpha \Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \notin \text{ДС}, \cos\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

От второто уравнение

$$\frac{8\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{8(3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha)}{\sin\alpha} = 8(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 8\left(3\cdot\frac{9}{16} - \frac{7}{16}\right) = 10\,\text{см}.$$

Четвърти начин:



Построява се точка $P \in BA^{\rightarrow}$, $AC = AP = 8$. $\triangle APC$-равнобедрен, $\angle CAB = 2\alpha$- външен за $\triangle APC \Rightarrow \angle APC = \angle PCA = \alpha$.

$\triangle APC \sim \triangle CPB$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{CP} = \frac{PC}{PB} \Leftrightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{8+x} \Leftrightarrow x = 10\,\text{см}.$$

ТЕМА 31

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 24.04.2010

Първа част. *Избираеми отговори*

Задача 1. Числото

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

е равно на:

А) $\sqrt{5}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$; Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2. При $x \neq -4$ изразът $\dfrac{12-x-x^2}{12+3x}$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{x-3}{3}$; Б) $\dfrac{3-x}{3}$; В) $-\dfrac{3-x}{3}$; Г) $\dfrac{-1-x^2}{3}$.

Задача 3. Решенията на неравенството $x(x^2-5x-14) \geq 0$ са:

А) $(-\infty, -2] \cup [7, +\infty)$; Б) $[-2, 0]$; В) $[-2, 0] \cup [7, +\infty)$; Г) $(-\infty, -7] \cup [2, +\infty)$.

Задача 4. Решенията на уравнението $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-16}} = x-1$ са:

А) 0 и 5; Б) 5; В) 0; Г) -5 и 5.

Задача 5. Решенията на уравнението $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ са:

А) 2 и -1; Б) -3 и 2; В) 9 и -3; Г) 2.

Задача 6. Ако квадратното уравнение $x^2 - 15x - 5 = 0$ има корени x_1 и x_2, то стойността на израза $x_1^{-1} + x_2^{-1}$ е равна на:

А) -3; Б) 3; В) 5; Г) 15.

Задача 7. Решението на системата уравнения $\left| \begin{array}{l} x^2y^3 + x^3y^2 = 18 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 36 \end{array} \right.$ е:

А) $x=1$ и $y=3$; Б) $x=1$ и $y=-3$; В) $x=-1$ и $y=3$; Г) $x=-1$ и $y=-3$.

Задача 8. Лицето на $\triangle ABC$ със страни $AB = 12$, $BC = 9$ и $AC = 7$ е:

А) $28\sqrt{5}$; Б) $24\sqrt{3}$; В) 28; Г) $14\sqrt{5}$.

Задача 9. Решението на неравенството $10\sin x + \cos 2x - 9 \geq 0$ при $x \in [\pi, 2\pi]$ е:

А) $x \in \varnothing$; Б) $x \in [1, 4]$; В) $x = \pi/2$; Г) $x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

Задача 10. Отсечката AL, $L \in BC$, е ъглополовяща на $\angle CAB$ в $\triangle ABC$, а точката $P \in AC$ е избрана така, че правите PL и AB са успоредни. Ако е известно, че $AB = 6$ и $AC = 3$, то дължината на отсечката PL е:

А) 3; Б) 4; В) 2; Г) невъзможно да се определи.

Втора част. *Свободни отговори*

Задача 11. По колко начина могат да се образуват 3 смесени двойки за латиноамерикански танци от групи от 7 момчета и 8 момичета (1 двойка се образува от 1 момче и 1 момиче)?

Задача 12. Да се определи дефиниционната област на функцията

$$f(x) = \frac{\log_2(x^2 + 6x + 9)}{\sqrt{4x^2 - 4x - 3}}.$$

Задача 13. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е аритметична прогресия с положителни членове, за която $a_8 - a_2 = 18$ и $a_2a_3 = 54$. Да се намери a_{2010}.

Задача 14. Симетралата на страната AC в $\triangle ABC$ пресича височината CH ($H \in AB$) във вътрешна точка K. Да се намери радиуса R на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако $CK = 5$, $HK = 3$ и $BC = 12\sqrt{5}$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

Задача 15. Страната AB на $\triangle ABC$ и медианата m_c към нея се отнасят съответно както $AB : m_c = 2 : 3$. За другите две медиани, m_a и m_b, е известно, че $m_a = 8$ и $m_b = 12$. Да се намери лицето на $\triangle ABC$.

Отговори

1. Г, **2**. Б, **3**. В, **4**. Б, **5**. Г, **6**. А, **7**. В, **8**. Г, **9**. А, **10**. В, **11**. 11760, **12**. $(-\infty, -3) \cup \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, **13**. 6030, **14**. $R = 15$, **15**. 64 ед^2.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 24.04.2010

Задача 1.

$$A=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{5}}{5}=\underbrace{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}}_{5\sqrt{3}}=\frac{5-\cancel{\sqrt{15}}+\cancel{\sqrt{15}}}{5\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Задача 2.

$$\frac{12-x-x^2}{12+3x}=\frac{-(x-3)\cancel{(x+4)}}{3\cancel{(x+4)}}=\boxed{\frac{3-x}{3}}$$

Задача 3.

$$x(x^2-5x-14)\geq 0 \Leftrightarrow x(x-7)(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\in[-2,0]\cup[7,+\infty)}$$

Задача 4.

$$\text{ДС:}\ \left|\begin{array}{l} x^2-16\geq 0\\ 1+x\sqrt{x^2-16}\geq 0\\ x-1\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (x-4)(x+4)\geq 0\\ x\sqrt{x^2-16}\geq -1\\ x\geq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)\\ x\geq 1\end{array}\right.$$

Следователно ДС: $\Leftrightarrow x\in[4,\infty)$.

Даденото уравнение се повдига на втора степен и се получава уравнение-следствие:

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2-16}}=x-1\Rightarrow \cancel{1}+x\sqrt{x^2-16}=x^2-2x+\cancel{1}\Leftrightarrow x\left[\sqrt{x^2-16}-(x-2)\right]=0,$$

което е еквивалентно на $x=0\notin$ ДС или $\sqrt{x^2-16}=x-2$. Последното уравнение, след повдигане на втора степен, води до $\cancel{x^2}-16=\cancel{x^2}-4x+4\Leftrightarrow x=5\in$ ДС. Чрез проверка се установява, че $\boxed{x=5}$ е решение.

Задача 5. В уравнението $(3^x)^2-6\cdot3^x-27=0$ се полага $3^x=t$, където ДС$_t$: $t>0$. Полученото квадратно уравнение $t^2-6t-27=0$ има корени $t_1=9\in$ ДС$_t$ и $t_2=-3\notin$ ДС$_t$. От полагането $3^x=3^2\Leftrightarrow \boxed{x=2}$.

Задача 6. От Формулите на Виет за корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2-15x-5=0$ се получава $x_1+x_2=15$ и $x_1x_2=-5$. Тогава

$$x_1^{-1}+x_2^{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{15}{-5}=\boxed{-3}.$$

Задача 7.

$$\left|\begin{array}{l} x^2y^3 + x^3y^2 = 18 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2y^2(y+x) = 18 \\ x^2y^2(y-x) = 36 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^2y^2 = \frac{18}{y+x} \\ x^2y^2 = \frac{36}{y-x} \end{array}\right. ,$$

откъдето следва, че $\frac{18}{y+x} = \frac{36}{y-x} \Leftrightarrow y = -3x$. Заместване на $(-3x)$ вместо y в едно от двете уравнения на дадената система води до $x^5 = -1$, откъдето се получава $\boxed{x = -1 \text{ и } y = 3}$.

Задача 8. $a = 9$, $b = 7$, $c = 12$, $p = \frac{9+7+12}{2} = 14$. По Херонова формула за лице на триъгълник

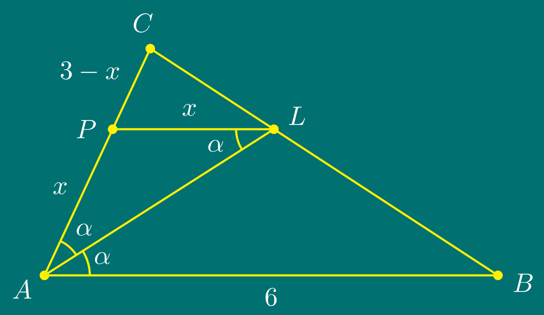
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-9)(14-7)(14-12)} = \boxed{14\sqrt{5}\,\text{ед}^2}.$$

Задача 9. За $x \in [\pi, 2\pi]$ се съобразява, че $\sin x \in [-1, 0]$ и $\cos x \in [-1, 1]$.

$$10\sin x + \cos 2x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow 10\sin x + (1 - 2\sin^2 x) - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - 5\sin x + 4 \leq 0.$$

След полагане $\sin x = t$, с допустими стойности ДС$_t$: $t \in [-1, 0]$, се получава квадратно неравенство $t^2 - 5t + 4 \leq 0$. Квадратният тричлен в лявата страна на неравенството има два реални корена $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$ и коефициентът $a = 1 > 0$, откъдето следва, че решенията на неравенството са $t \in [1, 4] \cap \text{ДС}_t = \boxed{\varnothing}$.

Задача 10.



Дадено: $\triangle ABC$, $AB = 6$, $AC = 3$, AL – ъглополовяща ($\angle LAB = \angle LAC$), $AB \parallel PL$.

Да се намери: PL

Решение: От $PL \parallel AB \Rightarrow \angle BAL = \angle ALP$ (вътрешни кръстни).

Но $\angle BAL = \angle LAP \Rightarrow \angle PAL = \angle PLA \Rightarrow \triangle ALP$ - равнобедрен.

Нека $PL = AP = x$. Тогава $PC = 3 - x$.

$$\triangle ABC \sim \triangle PLC \Rightarrow \frac{AB}{PL} = \frac{AC}{PC} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = \frac{3}{3-x} \Leftrightarrow 6(3-x) = 3x \Leftrightarrow \boxed{x = 2}.$$

Задача 11. $C_7^3 \cdot C_8^3 \cdot 3! = \boxed{11\,760}$ начина.

От 7 момчета се избират 3 по C_7^3 начина. От 8 момичета се избират 3 по C_8^3 начина. От избраните 3 момчета и 3 момичета трябва да се формират 3 състезателни двойки.

Нека например са фиксирани състезателните номера на трите момчета. Всяко от тях знае състезателния си номер, но не знае с кое момиче ще се състезава.

За първия състезател по случаен начин от трите момичета се избира едно по 3 начина, за втория–от останалите две момичета се избира едно по два начина и за третия остава едно момиче.

Задача 12.

$$f(x) = \frac{\log_2(x^2+6x+9)}{\sqrt{4x^2-4x-3}}$$

От свойствата на логаритмичната функция $x^2+6x+9>0$. Допустими стойности за $\sqrt{4x^2-4x-3}$ са тези, за които $4x^2-4x-3 \geq 0$, но тъй като знаменателят не трябва да е равен на нула, то $4x^2-4x-3 \neq 0$. От системата

$$\text{ДС: } \left| \begin{array}{l} x^2+6x+9>0 \\ 4x^2-4x-3>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x+3)^2>0 \\ 4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \neq -3 \\ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \end{array} \right.$$

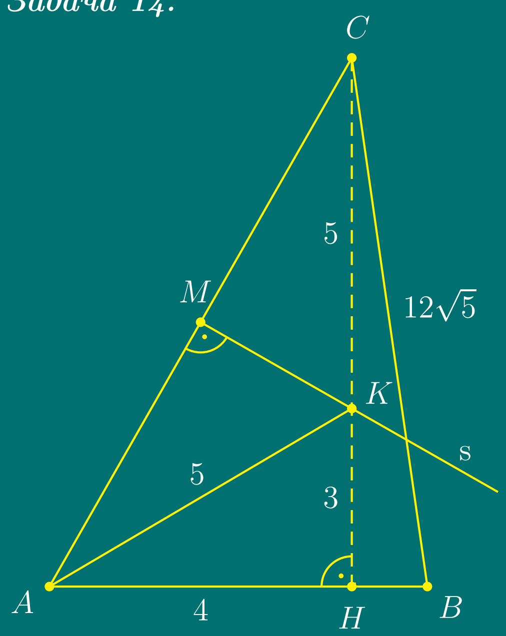
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Задача 13. По условие ДС: $a_i > 0$ за $i = 1, 2, 3, \ldots$ и $a_8 - a_2 = 18$, $a_2 a_3 = 54 \Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} (a_1+7d)-(a_1+d)=18 \\ (a_1+d)(a_1+2d)=54 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 6d=18 \\ a_1^2+3da_1+2d^2=54 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} d=3 \\ a_1^2+9a_1+18=54. \end{array} \right.$$

Квадратното уравнение $a_1^2+9a_1-36=0$ има корени $a_1 = 3 \in$ ДС и $a_1 = -12 \notin$ ДС. Тогава $a_{2010} = a_1 + 2009d = 3 + 2009 \cdot 3 = 2010 \cdot 3 = \boxed{6030}$.

Задача 14.



Дадено: $\triangle ABC$, CH–височина, s–симетрала на AC, $s \cap CH = K$, $CK = 5$, $HK = 3$, $BC = 12\sqrt{5}$.

Да се намери: R–радиус на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение: От свойството на симетралата $AK = CK = 5$. По Теоремата на Питагор от $\triangle AHK \Rightarrow$

$$AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

и от $\triangle AHC \Rightarrow$

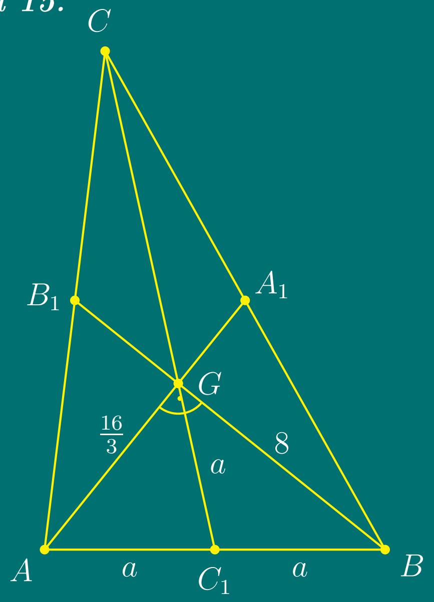
$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}.$$

Лицето на $\triangle ABC$ чрез R е $S = \dfrac{abc}{4R}$.

От друга страна, лицето чрез страната AB и височината към нея е $S = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$. Следователно

$$\frac{ab\cancel{c}}{4R} = \frac{\cancel{c} \cdot h_c}{2} \Leftrightarrow R = \frac{ab}{2h_c} = \frac{BC \cdot AC}{2 \cdot CH} = \frac{12\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2 \cdot 8} = 15.$$

Задача 15.



Дадено: $\triangle ABC$,

$$AB : m_c = 2 : 3,$$

$$m_a = 8\ ,\ m_b = 12.$$

Да се намери: $S_{\triangle ABC}$

Решение:

Нека $AB = 2a$, $m_c = 3a$.

Медицентърът G на $\triangle ABC$ дели медианите на триъгълника в отношение $3:1$, считано от върха.

Следователно:

$$AG = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}m_a = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \text{ и } BG = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}m_b = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$$

$$GC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = \frac{1}{3}m_c = \frac{1}{3} \cdot 3a = a.$$

В $\triangle ABG$ медианата $GC_1 = a$, а страната $AB = 2a$. Следователно C_1 е на едно и също разстояние от A, B и G, т.е. C_1 е център на описаната около $\triangle ABG$ окръжност, откъдето следва, че $\triangle ABG$ е правоъгълен.

$$S_{\triangle ABG} = \frac{AG \cdot BG}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 8 = \frac{64}{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ABG} = 3 \cdot \frac{64}{3} = \boxed{64\,\text{ед}^2}. \quad (31.1)$$

Забележка Необходимо е да се докаже твърдението, използвано в (31.1): Ако G е медицентър на $\triangle ABC$, то $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$.

$S_{\triangle AC_1C} = S_{\triangle BC_1C}$, защото $AC_1 = BC_1$ и C е общ връх. Аналогично, $S_{\triangle AC_1G} = S_{\triangle BC_1G}$, защото $AC_1 = BC_1$ и G е общ връх. Като се извадят почленно двете равенства, се получава $S_{\triangle ACG} = S_{\triangle BCG}$.

Аналогично $S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABG} \Rightarrow S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ACG}$.

ТЕМА 32

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за Русенски Университет «Ангел Кънчев», 15.07.2010

Първа част. *Задачи с избираеми отговори*

Задача 1. От дадените числа, най-голямо е:

А) $\sqrt{5}$; Б) $\frac{5}{2}$; В) $\sqrt[3]{10}$; Г) $\dfrac{5+\frac{3}{2}}{5-\frac{3}{2}}$.

Задача 2. Числото

$$A = \log_3 \frac{\sqrt{25-4^2}}{3} + \log_3 \sqrt{2}$$

е равно на:

А) $\log_3 \frac{1}{3} + \log_3 \sqrt{2}$; Б) $\log_3 \frac{2}{3}$; В) $\frac{1}{2}\log_3 2$; Г) $\log_3 \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 3. Разликата на аритметична прогресия, за която $a_{12} - a_4 = \sqrt{128}$ е:

А) $\sqrt{2}$; Б) $\sqrt{128}$; В) $2\sqrt{2}$; Г) не може да се определи.

Задача 4. Решенията на уравнението $\sqrt{x-3} + 2x - 5 = \sqrt{18-2x^2}$ са:

А) $x \in \varnothing$; Б) $x = 3$; В) $x = \pm 3$; Г) $x \in [3; +\infty)$.

Задача 5. Произведението от решенията на уравнението $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$ е равно на:

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) -2; Г) $-\frac{1}{2}$.

Задача 6. Решенията на уравнението $7^{x-4} - 7^{x-5} - 6 \cdot 7^{x-6} = 9 \cdot 2^{x-4}$ са:

А) $x = 0$; Б) $x_1 = 4$ и $x_2 = 6$; В) $x \in \varnothing$; Г) $x = 6$.

Задача 7. Нека x и y да са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - \frac{5}{2}xy = 0, \\ x - y - \frac{1}{4}xy = 0. \end{array} \right.$$

Най-малката стойност на $|x - y|$ е:

А) невъзможно да се определи; Б) 0; В) 6; Г) 2.

Задача 8. Триъгълник ABC има страни, равни на 18, 20, 22. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:

А) 11; Б) $4\sqrt{3}$; В) 8; Г) $4\sqrt{2}$.

Задача 9. Решенията на неравенството $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0$ са:

А) $x \in \varnothing$; Б) $x \in (-\infty, -1)$; В) $x \in (-1, \infty)$; Г) $x \in (-2, \infty)$.

Задача 10. Най-голямата от страните на триъгълник ABC е $AB = R\log_5(2^2+1)$, където R е радиусът на описаната окръжност. Мярката в радиани на вътрешния ъгъл при върха C е равна на:

А) $\frac{\pi}{6}$; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) $\frac{5\pi}{6}$; Г) $\frac{2\pi}{3}$.

Втора част. ***Задачи със свободни отговори***

Задача 11. В група от 12 студента, 25% са отличници. По колко начина може да се сформира отбор от 4 студента, така че точно един студент в него да е отличник?

Задача 12. Да се намерят решенията в интервала $[0, \pi]$ на уравнението

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos x = 1.$$

Задача 13. Известно е, че сумата на първите n члена на числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се намира по формулата $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 + 4n$. Да се намери стойността на a_7.

Задача 14. Даден е правоъгълникът $ABCD$ със страни $AB = 8$ и $BC = 6$. Построени са ъглополовящите DM $(M \in AB)$ и DN $(N \in BC)$ съответно в триъгълниците ABD и BDC. Да се намери лицето на триъгълника DMN.

Трета част. ***Задача с пълно решение***

Задача 15. Нека AM и BN са височини в триъгълник ABC, $M \in BC$, $N \in AC$ и $\angle BCA = 60^\circ$. Да се намери лицето на триъгълника ABC и страната AB, ако е известно, че $MB = 2$ и $NA = 5$.

Отговори: ***1.*** Б; ***2.*** В; ***3.*** А; ***4.*** А; ***5.*** В; ***6.*** Г; ***7.*** Б; ***8.*** Г; ***9.*** А; ***10.*** В;
11. 252; ***12.*** $3\pi/4$; ***13.*** 17; ***14.*** 20 ед^2; ***15.*** $S = 12\sqrt{3}$ ед^2, $AB = 2\sqrt{13}$ ед.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 15.07.2010

Задача 1. Проверяват се неравенствата:

$$\sqrt{5} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5 < \frac{25}{4} \Leftrightarrow 1 < \frac{5}{4} \to \text{ вярно;}$$

$$\sqrt[3]{10} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 10 < \frac{125}{8} \Leftrightarrow 80 < 125 \to \text{ вярно;}$$

$$\frac{5+\frac{3}{2}}{5-\frac{3}{2}} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{2}} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{13}{7} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 26 < 35 \to \text{ вярно;}$$

Следователно, най-голямото число от дадените четири е $\frac{5}{2}$.

Задача 2.

$$A = \log_3 \frac{\sqrt{25-4^2}}{3} + \log_3 \sqrt{2} = \log_3 1 + \log_3 \sqrt{2} = 0 + \log_3 2^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 2.$$

Задача 3.

$$a_{12} - a_4 = \sqrt{128} \Leftrightarrow (a_1 + 11d) - (a_1 + 3d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 8d = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow d = \sqrt{2}.$$

Задача 4. $\sqrt{x-3} + 2x - 5 = \sqrt{18-2x^2}$

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \\ 18-2x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-3}+2x-5 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq 3 \\ 2(3-x)(3+x) \geq 0 \\ \sqrt{x-3} \geq 5-2x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \in [-3,3] \\ x \geq 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \{3\}$$

Замества се $x = 3$ в уравнението: $\sqrt{3-3} + 2\cdot 3 - 5 \neq \sqrt{18 - 2\cdot 3^2} \Rightarrow x \in \varnothing$.

Задача 5.

$$4^{x+1} - 9\cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\cdot (2^x)^2 - 9\cdot 2^x + 2 = 0.$$

Полага се $2^x = t$ с допустими стойности $ДС_t : t > 0$. Получава се квадратно уравнение $4t^2 + 9t + 2 = 0$ с корени $t_1 = 2 \in ДС_t$ и $t_2 = \frac{1}{4} \in ДС_t$. От полагането $2^x = 2^1$ или $2^x = 2^{-2}$. Следователно, решенията на даденото уравнение са $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, чието произведение е (-2).

Задача 6. $7^{x-4} - 7^{x-5} - 6\cdot 7^{x-6} = 9\cdot 2^{x-4} \Leftrightarrow$

$$7^{x-4}\underbrace{\left[\overbrace{1}^{49} - \overbrace{\frac{1}{7}}^{7} - \frac{6}{7^2}\right]}_{49} = 9\cdot 2^{x-4} \Leftrightarrow 7^{x-4}\cdot\frac{36}{49} = 9\cdot 2^{x-4} \Leftrightarrow 7^{x-6} = 2^{x-6} \Leftrightarrow x-6 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

Задача 7.

$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy \geq 0 \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-y)^2-2xy=\frac{5}{2}xy \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x-y)^2=\frac{1}{2}xy \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{array} \right.$$

От второто уравнение $\Rightarrow |x-y|=\frac{1}{4}|xy|$. След заместване на $x-y=\frac{1}{4}xy$ в първото уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}xy\right)^2=\frac{1}{2}xy \Leftrightarrow (xy)^2=8xy \Leftrightarrow xy(xy-8)=0 \Leftrightarrow xy=0 \text{ или } xy=8$$

Следователно $|x-y|=\frac{1}{4}|xy|=0$ или 2, откъдето следва, че най-малката стойност на $|x-y|$ е нула.

Задача 8. Полупериметърът е $p=\frac{18+20+22}{2}=30$. От Хероновата формула

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{30\cdot 12\cdot 10\cdot 18}=120\sqrt{2}.$$

От формулата за лице $S=pr \Leftrightarrow 120\sqrt{2}=30r \Leftrightarrow r=4\sqrt{2}$.

Задача 9. $a=\frac{1}{3}<1$

$$\text{ДС: } \left| \begin{array}{l} x+2>0 \\ x+1>0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x>-2 \\ x>-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x\in(-1,\infty)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Leftrightarrow x+2<x+1 \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Задача 10. $AB=R\log_5 5=R$. Тъй като AB е най-голямата страна, то срещу нея лежи най-голям ъгъл:

$$\left| \begin{array}{l} \gamma>\alpha \\ \gamma>\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow 2\gamma>\alpha+\beta \Leftrightarrow 2\gamma>180^\circ-\gamma \Leftrightarrow 3\gamma>180^\circ \Leftrightarrow \gamma>60^\circ.$$

От Синусова теорема, приложена за $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=2R \Leftrightarrow \frac{R}{\sin\gamma}=2R \Leftrightarrow \sin\gamma=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \gamma=30^\circ \text{ или } \gamma=150^\circ.$$

На условието $\gamma\in(60^\circ,180^\circ)$ отговаря само ъгълът с градусна мярка 150°, което в радиани е $\frac{5\pi}{6}$.

Задача 11. $25\%\cdot 12=\frac{25}{100}\cdot 12=3$ отличници. За да се сформира отбор от 4 човека, така че точно един от тях да е отличник, трябва от тримата отличници да се избере един и от останалите 9 студента (с по-нисък успех), да се изберат трима:

$$C_3^1\cdot C_9^3=3\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}=\frac{\cancel{3}\cdot 9\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}}=252 \text{ начина.}$$

Задача 12.

$$\cos 2x - \sqrt{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\cos x = 1.$$

Полага се $\cos x = t$ за $t \in [-1, 1]$. Квадратното уравнение $2t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0$ има корени $t_1 = \sqrt{2} \notin ДС_t$ и $t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in ДС_t$.

От полагането: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откъдето $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathcal{Z}$.

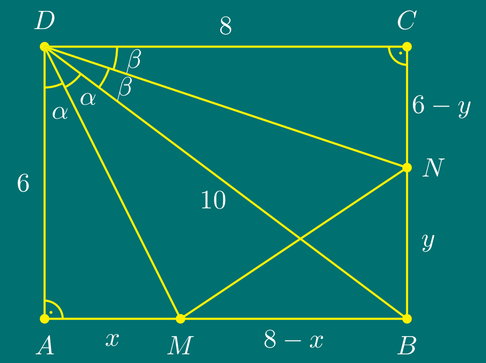
В интервала $[0, \pi]$ е само ъгълът $\frac{3\pi}{4}$.

Задача 13.

$$S_7 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + a_7 = S_6 + a_7 \Rightarrow$$

$$a_7 = S_7 - S_6 = (7^2 + 4\cdot 7) - (6^2 + 4\cdot 6) = (49 + 28) - (36 + 24) = 77 - 60 = 17.$$

Задача 14.



Нека $AM = x$, $BN = y$.

Тогава $MB = 8 - x$, $CN = 6 - y$.

По Питагорова теорема от $\triangle ABD \Rightarrow$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow$$

$$BD^2 = 64 + 36 \Rightarrow BD = 10.$$

От свойството на ъглополовящата:

$$\triangle ABD \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{x}{8-x} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow AM = 3, MB = 5.$$

$$\triangle BCD \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{y}{6-y} = \frac{10}{8} \Leftrightarrow y = \frac{10}{3} \Rightarrow BN = \frac{10}{3}, NC = \frac{8}{3}.$$

$$\triangle AMD \Rightarrow DM^2 = AD^2 + AM^2 \Leftrightarrow DM = 3\sqrt{5}$$

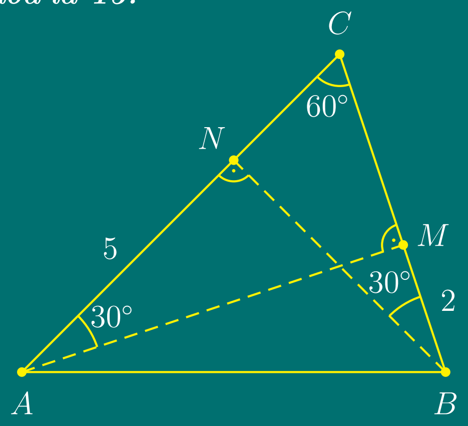
$$\triangle NCD \Rightarrow DN^2 = CN^2 + CD^2 \Leftrightarrow DN = \frac{8}{3}\sqrt{10}$$

$$S = \frac{1}{2}DM \cdot DN \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{8\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \text{ ед}^2.$$

Втори начин:

$$S_{\triangle MND} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMD} - S_{\triangle MBN} - S_{\triangle NCD} = 6\cdot 8 - \frac{1}{2}\left(6\cdot 3 - 5\cdot\frac{10}{3} - \frac{8}{3}\cdot 8\right) = 20 \text{ ед}^2.$$

Задача 15.



Нека $BC = a$, $AC = b$.

$$\text{От } \triangle AMC \Rightarrow MC = \frac{b}{2}.$$

$$\text{От } \triangle BNC \Rightarrow NC = \frac{a}{2}.$$

$$\text{От } \triangle ABC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 5 + \frac{a}{2} = b, \\ 2 + \frac{b}{2} = a. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 6, \\ b = 8. \end{array} \right.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ ед}^2.$$

От Косинусова теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13} \text{ ед.}$$

ТЕМА 33

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за Русенски Университет «Ангел Кънчев», 16.04.2011

Първа част. ***Задачи с избираеми отговори***

Задача 1. Числото $(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ е равно на:

А) $2\sqrt{5}$; Б) $-2\sqrt{3}$; В) $2\sqrt{3}$; Г) $\sqrt{5}$.

Задача 2. Ако $5^x=2$, стойността на израза $A=5^{5x-2}$ е равна на:

А) 64; Б) 125; В) $1\dfrac{7}{25}$; Г) $\dfrac{64}{125}$.

Задача 3. При $x<1$ изразът $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2-4x}}{(2-x)(x-1)}$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{|\,x+1-2\sqrt{x}\,|}{(2-x)(x-1)}$; Б) $\dfrac{1}{2-x}$; В) $\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(2-x)(x-1)}$; Г) $\dfrac{1}{x-2}$.

Задача 4. Броят на целите числа, които са решения на неравенството $x^4-5x^2+4<0$ е:

А) 0; Б) 2; В) 4; Г) ∞.

Задача 5. Решенията на уравнението $\sqrt{4x-x^2}=(x^2-4x)\sqrt{3x-1}$ са:

А) $0;\dfrac{1}{3};4$; Б) $0;4$; В) $4;\dfrac{1}{3}$; Г) 4.

Задача 6. Ако $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{5}$, $\alpha\in(0^\circ;180^\circ)$, стойността на израза $\sin\dfrac{\alpha}{4}\cdot\cos\dfrac{3\alpha}{4}$ е:

А) $-\dfrac{1}{5}$; Б) $\dfrac{1}{5}$; В) $\dfrac{2}{25}$; Г) $-\dfrac{2}{25}$.

Задача 7. За аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ е известно, че $a_3 + a_{25} = 45$. Стойността на израза $(a_1 + a_{10} + a_{40} + a_5)$ е:

А) 60; Б) 90; В) 135; Г) не може да се определи.

Задача 8. Страните AB и BC на $\triangle ABC$ са съответно $AB = 10$, $BC = 17$, а $\cos\angle BAC = -\dfrac{3}{5}$. Страната AC е:

А) 6; Б) 21; В) 12; Г) 9.

Задача 9. В равностранен триъгълник със страна $4\sqrt{3}$ е взета точка M, която е на разстояния 2 и 3 от две от страните му. Разстоянието от точката M до третата страна на триъгълника е:

А) 1; Б) $\sqrt{3}$; В) 2; Г) 3.

Задача 10. От 12 изделия 50% са дефектни. Да се намери вероятността сред 4 случайно избрани изделия, точно 2 от тях да са дефектни.

А) $\dfrac{6}{11}$; Б) $\dfrac{5}{11}$; В) $\dfrac{7}{11}$; Г) $\dfrac{8}{11}$.

Втора част. *Задачи със свободни отговори*

Задача 11. Да се реши системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - 2xy + x = 0, \\ xy - 6x + 7y + 8 = 0. \end{array}\right.$$

Задача 12. Да се реши уравнението $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Задача 13. Да се намерят три числа, образуващи растяща геометрична прогресия, при което сумата на първото и третото число да е 52, а квадратът на второто да е 100.

Задача 14. В остроъгълен $\triangle ABC$ височината BH, $(H \in AC)$ и ъглополовящата AD, $(D \in BC)$ се пресичат в точка K. Върху продължението на AD е взета точка M, такава, че $BM = BK$. Да се намери $\angle ABM$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

Задача 15. Трапецът $ABCD$ е такъв, че в него може да се впише окръжност, бедрото AD и диагоналът BD са равни на 9, а основата AB е 12. Да се намери дължината на основата CD.

Отговори: ***1.*** В; ***2.*** В; ***3.*** Г; ***4.*** А; ***5.*** Г; ***6.*** В; ***7.*** Б; ***8.*** Г; ***9.*** А; ***10.*** Б; ***11.*** $(0, -\frac{8}{7})$; ***12.*** $x_1 = -1; x_2 = 2$; ***13.*** $2, 10, 50$; ***14.*** $90°$; ***15.*** $CD = 4$ ед.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 16.04.2011

Задача 1.

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{3}-\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{3}=\boxed{2\sqrt{3}}.$$

Задача 2.

$$A=5^{5x-2}=\frac{5^{5x}}{5^2}=\frac{\left(5^x\right)^5}{25}=\frac{2^5}{25}=\frac{32}{25}=\boxed{1\frac{7}{25}}$$

Задача 3.

От $x<1\Rightarrow x-1<0\Rightarrow\mid x-1\mid=-(x-1)$.

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2-4x}}{(2-x)(x-1)}=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(2-x)(x-1)}=\frac{\mid x-1\mid}{(2-x)(x-1)}=\frac{-\cancel{(x-1)}}{(2-x)\cancel{(x-1)}}=\boxed{\frac{1}{x-2}}.$$

Задача 4.

Полага се $x^2=t, t>0$. Квадратният тричлен $t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$. Лявата страна на неравенството $x^4-5x^2+4<0$ се разлага на множители

$$(x^2-1)(x^2-4)<0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)<0.\Leftrightarrow x\in(-2,-1)\cup(1,2).$$

Следователно, има $\boxed{0}$ на брой цели числа, които да са решения на даденото неравенство.

Задача 5.

$$\text{ДС:}\ \left|\begin{array}{l}3x-1\geq0\\4x-x^2\geq0\\x^2-4x\geq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\geq\frac{1}{3}\\4x-x^2\geq0\\4x-x^2\leq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\geq\frac{1}{3}\\x(4-x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\geq\frac{1}{3}\\x=0\text{ или }x=4.\end{array}\right.$$

Окончателно ДС: $x=4$.

Единствената допустима стойност $\boxed{x=4}$ се замества в уравнението, за да се провери дали е решение:

$$\sqrt{4\cdot4-4^2}=(4^2-4\cdot4)\sqrt{3\cdot4-1}.$$

Задача 6. От $0 < \alpha < 180° \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < 90°$ и $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ се определя

$$\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Тогава

$$\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{3\alpha}{4} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{3\alpha}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\left(2\cdot\frac{3}{5}-1\right) = \boxed{\frac{2}{25}}$$

Задача 7.

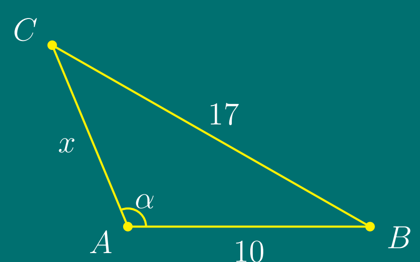
От формулата $a_n = a_1 + (n-1)d$ за $n = 3$ и $n = 25$ следва

$$a_3 + a_{25} = 45 \Leftrightarrow a_1 + 2d + a_1 + 24d = 45 \Leftrightarrow 2(a_1 + 13d) = 45.$$

Тогава

$$a_1+a_{10}+a_{40}+a_5 = a_1+a_1+9d+a_1+39d+a_1+4d = 4a_1+52d = 2\cdot 2(a_1+13d) = 2\cdot 45 = \boxed{90}.$$

Задача 8.



Нека $\angle BAC = \alpha$, $AC = x > 0$.

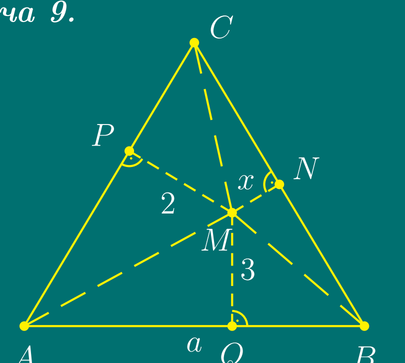
От $\cos\alpha = -\frac{3}{5} < 0$ следва, че $90° < \alpha < 180°$.

От Косинусова теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow 17^2 = 10^2 + x^2 - 2\cdot 10\cdot x\left(-\tfrac{3}{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x - 189 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 9} \in \text{ДС}, x_2 = -21 \notin \text{ДС}.$$

Задача 9.



Нека търсеното разстояние е $x > 0$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}, \quad (33.1)$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{ACM}. \quad (33.2)$$

От (34.1) и (34.2) $\Rightarrow$

$$12\sqrt{3} = \frac{a \cdot 3}{2} + \frac{a \cdot 2}{2} + \frac{a \cdot x}{2} \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{2}(3+2+x) \Leftrightarrow \boxed{x=1}.$$

Задача 10.

Половината от изделията са дефектни, останалите шест–изправни. Избират се четири изделия. Търси се вероятността на събитието A={избрани са две дефектни и две изправни изделия}.

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_6^2}{C_{12}^4} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2!}\frac{6\cdot 5}{2!}}{\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}}{1\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot \cancel{9}} = \boxed{\frac{5}{11}}$$

Задача 11.

$$\left| \begin{array}{l} x(x-2y+1)=0 \\ xy-6x+7y+8=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (3) \left| \begin{array}{l} x=0 \\ xy-6x+7y+8=0 \end{array} \right. \text{ или } (4) \left| \begin{array}{l} x-2y+1=0 \\ xy-6x+7y+8=0 \end{array} \right.$$

$$(3) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ xy-6x+7y+8=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ 7y+8=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{8}{7} \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = \boxed{\left(0, -\frac{8}{7}\right)}$$

$$(4) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2y-1 \\ (2y-1)y-6(2y-1)+7y+8=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=2y-1 \\ y^2-3y+7=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) \in \varnothing$$

Задача 12.

$3^{2x} \cdot 3 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$

Полага се $3^x = t$ с допустими стойности ДС$_t$: $t > 0$. Получава се квадратно уравнение $3t^2 - 28t + 9 = 0$ с корени $t_1 = 9 \in$ ДС$_t$ и $t_2 = \frac{1}{3} \in$ ДС$_t$.

От полагането $3^x = 3^2$ или $3^x = 3^{-1}$. Решенията на даденото уравнение са $\boxed{x_1 = 2}$ и $\boxed{x_2 = -1}$.

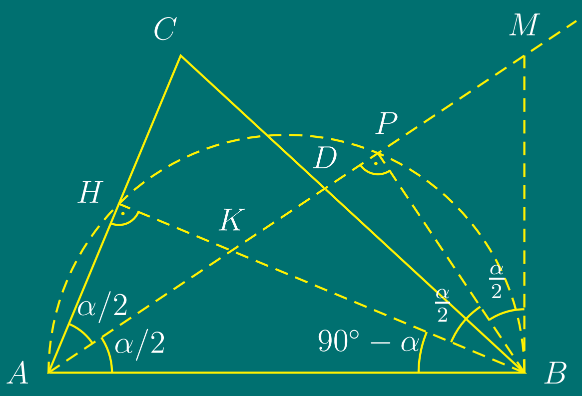
Задача 13.

Нека a_1, a_1q, a_1q^2 са трите търсени числа. По условие $q > 1$ и от $a_1 + a_1q^2 = 52 \Rightarrow a_1 > 0$. Тогава от $(a_1q)^2 = 100 \Rightarrow a_1q = 10$.

$$\left| \begin{array}{l} a_1(1+q^2)=52 \\ a_1q=10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{10}{q}(1+q^2)=52 \\ a_1=\frac{10}{q} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5q^2-26q+5=0 \\ a_1=\frac{10}{q} \end{array} \right.$$

Квадратното уравнение $5q^2 - 26q + 5 = 0$ има корени $q_1 = 5 \in$ ДС, $q_2 = \frac{1}{5} \notin$ ДС. Следователно $a_1 = 2$, а търсените числа са $\boxed{2,\ 10,\ 50.}$

Задача 14.



Нека $BP \perp KM$.

По условие $\triangle KBM$ е равнобедрен, следователно BP е ъглополовяща, медиана и височина.

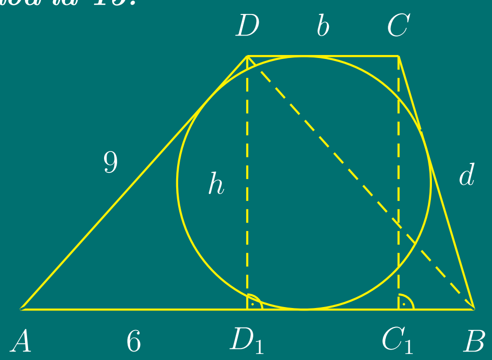
Тогава A, B, P, H лежат на една окръжност с диаметър AB.

Нека $\angle CAB = \alpha$.

$$\angle HBP = \angle HAP = \frac{1}{2}\text{м.}\overset{\frown}{HP} \Rightarrow \angle HBP = \angle PBM = \frac{\alpha}{2}.$$

От $\triangle ABH \Rightarrow \angle ABH = 90° - \alpha \Rightarrow \angle ABM = \angle ABH + 2\angle KBP = 90° - \alpha + \cancel{2} \cdot \frac{\alpha}{\cancel{2}} = \boxed{90°}$.

Задача 15.



Нека $CD = b$, $BC = d$, $DD_1 = CC_1 = h$.

От $ABCD$–описан около окръжност следва, че $b + 12 = d + 9 \Rightarrow d = b + 3$.

От $\triangle ABD$–равнобедрен следва, че DD_1 е височина, ъглополовяща и медиана. $AD_1 = D_1B = 6, DD_1 \perp AB$.

$$\triangle AD_1D \Rightarrow h^2 = AD^2 - AD_1^2 = 9^2 - 6^2 = 45 \Rightarrow h = 3\sqrt{5}.$$

$$\triangle C_1BC \Rightarrow BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2 \Leftrightarrow (b+3)^2 = (6-b)^2 + 45 \Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow \boxed{CD = 4 \text{ ед.}}$$

ТЕМА 34

Писмен конкурсен кандидатстудентски изпит по математика за Русенски Университет «Ангел Кънчев», 14.07.2011

Първа част. *Задачи с избираеми отговори*

Задача 1. Числото $19 \cdot \left(2^{-1}+4^{-1}+5^{-1}\right)^{-1}$ е равно на:

А) 209; Б) $\frac{361}{20}$; В) $\frac{20}{361}$; Г) 20.

Задача 2. Числото $\sqrt{\left(\sqrt{9}+2\right)^2-9}$ е равно на:

А) 4; Б) $\sqrt{4}$; В) $\sqrt{9}-1$; Г) $\sqrt{9}-7$.

Задача 3. Решението на неравенството $\dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-x+1)(2x+1)} \le 0$ е:

А) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$; Б) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$; В) $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \{2\}$; Г) $\forall x$.

Задача 4. Решенията на неравенството $x^4-3x^2-4<0$ са:

А) $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$; Б) $x \in (-2,2)$; В) $x \in [-2,2]$; Г) $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$.

Задача 5. Решенията на уравнението $\sqrt{x^2+6x-16} = x + \sqrt{6x-16}$ са:

А) 0; Б) 0 и $\dfrac{8}{3}$; В) 8 и $\dfrac{8}{3}$; Г) $\dfrac{8}{3}$.

Задача 6. Ако $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}, \alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, стойността на израза $\cos\dfrac{3\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$ е:

А) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{6}$; Б) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}$; В) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 7. Числата a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуват геометрична прогресия, като a_2 е 0,8% от a_5, а $a_4 + a_5 = 1500$. Сумата $a_1 + a_2 + a_3$ е равна на:

А) 12; Б) 312; В) 62; Г) 310.

Задача 8. В $\triangle ABC$ диаметърът на описаната окръжност е 20, а $\cos\angle ACB = \dfrac{4}{5}$. Страната AB е равна на:

А) 20; Б) 12; В) 6; Г) 25.

Задача 9. Ако полупериметърът на правоъгълен триъгълник е 12, а хипотенузата му е 10, то лицето му е равно на:

А) 24; Б) 96; В) 48; Г) 120.

Задача 10. Седем души трябва да седнат на един ред от седем стола. По колко начина могат да го направят така, че определени двама от тях да са на съседни столове?

А) 580; Б) 720; В) 1440; Г) 2160.

Втора част. *Задачи със свободни отговори*

Задача 11. Да се намерят целите решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} 3x^2 - 2xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 3xy - 4y^2 = -9. \end{array}\right.$$

Задача 12. Да се намери множеството от реални числа x, за които функцията

$$y = \log_4(x^2 - 8x + 12)$$

приема стойности по-малки от 1.

Задача 13. Сумата на три числа, които образуват растяща геометрична прогресия, е 65. Ако първото намалим с 2, а второто увеличим с 9, получените числа, взети в същия ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят първоначалните числа.

Задача 14. Нека четириъгълникът $ABCD$ е такъв, че около него може да се опише окръжност, а диагоналът BD е ъглополовяща на $\angle ADC$. От върха B е спуснат перпендикуляр BH към DC. Да се намери страната AD, ако H е такава вътрешна точка за отсечката DC, че $DH = 7$ и $DC = 9$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

Задача 15. Точка M е средата на страната AB на успоредника $ABCD$. Да се намери лицето му, ако $CM = 3\sqrt{5}$, $DM = \sqrt{13}$ и $\cos\angle DAB = \frac{4}{5}$.

Отговори: ***1.*** Г; ***2.*** А; ***3.*** В; ***4.*** Б; ***5.*** Г; ***6.*** Б; ***7.*** В; ***8.*** Б; ***9.*** А; ***10.*** В; ***11.*** $(1,2)$; $(-1,-2)$; ***12.*** $x \in (4-2\sqrt{2}, 2) \cup (6, 4+2\sqrt{2})$; ***13.*** 5, 15, 45; ***14.*** 5; ***15.*** 12.

Решения

Решения на темата от кандидатстудентски изпит по математика за РУ «Ангел Кънчев», 14.07.2011

Задача 1.

$$19 \cdot \left(2^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1}\right)^{-1} = 19\Big(\underbrace{\overset{10}{\frac{1}{2}} + \overset{5}{\frac{1}{4}} + \overset{4}{\frac{1}{5}}}_{20}\Big)^{-1} = 19\left(\frac{19}{20}\right)^{-1} = 19 \cdot \frac{20}{19} = \boxed{20}.$$

Задача 2.

$$\sqrt{\left(\sqrt{9}+2\right)^2 - 9} = \sqrt{(3+2)^2 - 9} = \sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \boxed{4}.$$

Задача 3. Тъй като $x^2 - x + 1 > 0$ и $(x-2)^2 \geq 0$ за $\forall x$, то неравенството е еквивалентно на системата

$$\left| \begin{array}{l} (x-2)^2(x^2-x+1)(2x+1) \leq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x+1 \leq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{или } x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\right) \cup \{2\}}.$$

Задача 4.

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+1) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0. \Leftrightarrow \boxed{x \in (-2, 2)}.$$

Задача 5.

$$\text{ДС:} \left| \begin{array}{l} 6x - 16 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 16 \geq 0 \\ x + \sqrt{6x-16} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}.$$

Повдигат се двете страни на уравнението на втора степен:

$$\cancel{x^2} + \cancel{6x} - \cancel{16} = \cancel{x^2} + 2x\sqrt{6x-16} + \cancel{6x} - \cancel{16} \Leftrightarrow 2x\sqrt{6x-16} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \text{ДС}; \boxed{x = \frac{8}{3}} \in \text{ДС}.$$

Задача 6. От $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ и $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow$

$$\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow 1 - \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = +\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] == \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos\alpha)$$

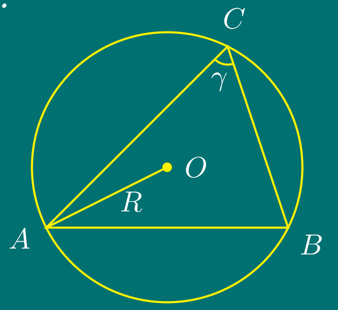
$$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha - 1 + \cos\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{3} - \overset{\underset{\smile}{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{6}}.$$

Задача 7. От формулата $a_n = a_1 q^{n-1}$ за $n = \overline{1,5} \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} a_2 = 0{,}8\% a_5 \\ a_4 + a_5 = 1500 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1 q = \frac{0{,}8}{100} a_1 q^4 \\ a_1 q^3 + a_1 q^4 = 1500 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} q^3 = \frac{1000}{8} \\ a_1 q^3 (1+q) = 1500 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} q = 5 \\ a_1 = 2 \end{array}\right.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 2(1 + 5 + 5^2) = \boxed{62}.$$

Задача 8.

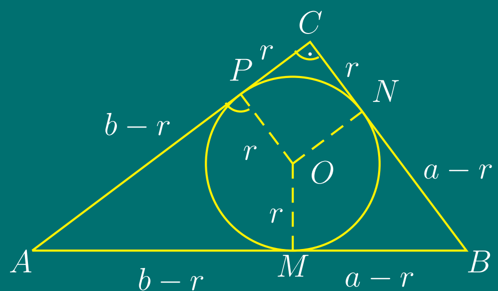


$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

От Синусова теорема за $\triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R \Leftrightarrow \frac{AB}{\frac{3}{5}} = 20 \Leftrightarrow AB = \boxed{12 \text{ ед}}.$$

Задача 9.



По условие $p = \frac{a+b+c}{2} = 12$ и $c = 10$.

От $a + b + c = 2p \Leftrightarrow a + b + 10 = 24 \Leftrightarrow a + b = 14$.

От $a + b - 2r = c \Leftrightarrow 14 - 2r = 10 \Leftrightarrow r = 2$.

Тогава $S = pr = 12 \cdot 2 = \boxed{24 \text{ ед}^2}$.

Задача 10. Двамата, които трябва да са един до друг, можем да считаме за един елемент, който заема два последователни стола. Шест елемента се разпределят на шест места по 6! начина. Остава да се предвиди, че двамата могат да седнат на два стола по 2! начина.

$$2! \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{1440}.$$

Задача 11.

$$\left|\begin{array}{l} 3x^2-2xy+y^2=3 \mid \cdot 3 \\ x^2+3xy-4y^2=-9 \end{array}\right. \Rightarrow 10x^2-3xy-y^2=0 \mid : y^2$$

За хомогенното уравнение $10\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)-1=0$ се полага $\frac{x}{y}=t$. Получава се квадратно уравнение $10t^2-3t-1=0$ с корени $t_1=-\frac{1}{5}$ и $t_2=\frac{1}{2}$.

От $t_1=-\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow y=-5x$. Тогава $3x^2-2x\cdot(-5x)+25x^2=3\Leftrightarrow 38x^2=3$. В този случай решенията на системата не са цели числа.

От $t_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=2x$. Тогава $3x^2-2x\cdot 2x+4x^2=3\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. В този случай решенията на системата са $\boxed{(1,2) \text{ и } (-1,-2)}$.

Задача 12. Допустими стойности за функцията са

$$\text{ДС: } x^2-8x+12>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty).$$

$$\log_4(x^2-8x+12)<1\Leftrightarrow\log_4(x^2-8x+12)<\log_4 4\Leftrightarrow x^2-8x+12<4\Leftrightarrow$$

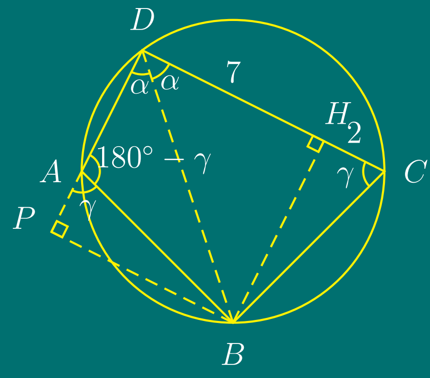
$$x\in(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})\cap\text{ДС}\Leftrightarrow\boxed{x\in(4-2\sqrt{2},2)\cup(6,4+2\sqrt{2})}.$$

Задача 13. Нека $x,y,z,\ (x<z)$ са трите търсени числа, членове на растяща геометрична прогресия. По условие $x-2, y+9, z$ образуват аритметична прогресия.

$$\left|\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ y^2=xz \\ x-2+z=2(y+9) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ -x+2y-z=-20 \\ xz=y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ y=15 \\ xz=y^2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} x+z=50 \\ y=15 \\ xz=225 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(45,15,5)\notin\text{ДС}\vee\boxed{(x,y,z)=(5,15,45)}\in\text{ДС}.$$

Задача 14. **Първи начин:**



$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow AB=BC.$$

Нека $BP\perp AD$. От еднаквостта

$$\triangle DPB\cong\triangle DHB\Rightarrow PD=7.$$

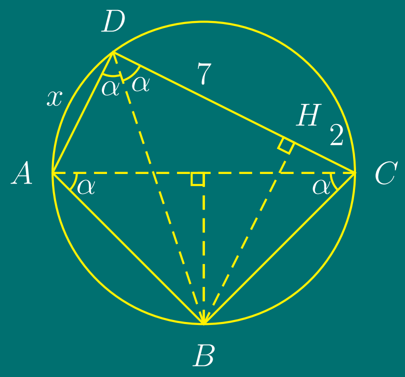
$$\triangle APB\cong\triangle CHB\Rightarrow AP=HC=2$$

$$\Rightarrow AD=PD-AP=7-2=\boxed{5 \text{ ед}}.$$

Втори начин: $\angle DCB < 90^\circ \Rightarrow \angle DCA < 90^\circ - \alpha$.

$$\angle DAC + \angle DCA = 2(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \angle DAC + \angle DCA > 2 \cdot \angle DCA.$$

Следователно $\angle DAC > \angle DCA \Rightarrow DC > DA$, т.е. $DA < 9$.



$$\triangle DBH \Rightarrow BD = \frac{7}{\cos\alpha}, BH = 7\operatorname{tg}\alpha$$

$$\triangle BCH \Rightarrow BC = \sqrt{CH^2 + BH^2}$$

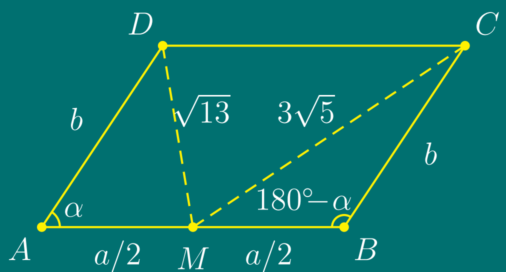
$$\Rightarrow AB = BC = \sqrt{4 + 49\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\triangle ABD \Rightarrow AB^2 = x^2 + BD^2 - 2x \cdot BD\cos\alpha \Leftrightarrow 4 + 49\operatorname{tg}^2\alpha = x^2 + \frac{49}{\cos^2\alpha} - 2x \cdot \frac{7}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \cancel{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 4 + 49\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) = x^2 + \frac{49}{\cos^2\alpha} - 14x \Leftrightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 9 \notin \text{ДС}, x_2 = 5.$$

Следователно $\boxed{AD = 5 \text{ ед}}$.

Задача 15.



Нека $AB = a$, $BC = b$. От $\triangle AMD \Rightarrow$

$$(\sqrt{13})^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$13 = b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{4}{5}ab \qquad (34.1)$$

$$\triangle MBC \Rightarrow (3\sqrt{5})^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2}\cos(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow 45 = b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{4}{5}ab \quad (34.2)$$

След почленно изваждане на (34.2)-(34.1) се определя $ab = 20$. Тогава

$$S_{ABCD} = ab\sin\alpha = ab\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 20\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 20 \cdot \frac{3}{5} = \boxed{12 \text{ ед}^2}.$$

ТЕМА 35

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Ако $a = \log_2 3$, то стойността на израза $2^a - \log_2 9$ е равна на:

А) $2 - 2a$; Б) $3 - a^2$;
В) $1 - a$; Г) $3 - 2a$.

2. Да се съкрати дробта

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y}, \quad x, y > 0.$$

А) $y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$; Б) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$;
В) 0; Г) $\frac{\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}}{x+y}$.

3. Да се реши уравнението

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2 - 9x + 18} = \frac{2}{x-6}.$$

А) $x = -7$; Б) $x = 3$;
В) $x = 6$; Г) $x = 5$.

4. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x+4} = x - 2.$$

А) $x = 0$; Б) $x = 5$;
В) $x = 2$; Г) няма решение.

5. Да се реши уравнението

$$\lg(x^2 - 8x + 7) = 2\lg(x - 5).$$

А) $x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{2}$;
Б) $x = 4$;
В) $x = 9$;
Г) няма решение.

6 Средноаритметичното на медианата и модата на данните 1,2,6,3,2,5,4,2,1,8 е:

А) $\frac{9}{4}$; Б) $\frac{11}{4}$; В) $\frac{7}{4}$; Г) $\frac{3}{2}$.

7. Петър написал на картончета цифрите от 1 до 5 по следния начин: цифрата 1 на едно картонче, цифрата 2–на две картончета, цифрата 3–на три картончета и т.н. Сложил картончетата в кутия и ги разбъркал. Вероятността на едно произволно изтеглено картонче да има четна цифра е:

А) $\frac{3}{5}$; Б) $\frac{1}{7}$; В) $\frac{2}{5}$; Г) $\frac{12}{35}$.

8. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y - 2\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 10. \end{array} \right.$$

А) $x = 1, y = 9$;
Б) $x = 9, y = 1$;
В) $x = 5, y = 5$;
Г) $x = 1, y = 9$ или $x = 9, y = 1$.

9. В $\triangle ABC$ симетралата на страната AC пресича AB в т. N. Ако т. M е средата на AC и $CN = a$, то радиусът на описаната около $\triangle ANM$ окръжност е равен на:

А) a; Б) $a/2$; В) $a/4$; Г) $2a$.

10. Радиусите на две окръжности са $R = 7\,cm$ и $r = 2\,cm$, а разстоянието между центровете им е $13\,cm$. Да се намери дължината на общата им външна допирателна t.

А) $t = 4\,cm$; Б) $t = \sqrt{194}\,cm$;
В) $t = 9\,cm$; Г) $t = 12\,cm$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се пресметне стойността на израза

$$\frac{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha}, \text{ ако } \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

12. Страните на триъгълник са $8\,cm$, $15\,cm$ и $17\,cm$. Да се намерят радиусите на вписаната във и описаната около триъгълника окръжности.

13. Дадена е функцията

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x + m,$$

където m е реален параметър. Да се определят:

а) стойността на реалния параметър m, за която графиката на функцията $f(x)$ минава през точката $M(3, 0)$;

б) големината на ъгъла α, който допирателната към графиката на $f(x)$ в т. M сключва с положителната посока на абсцисната ос Ox.

14. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$y = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

за $x \in [0, 2]$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), вписан в окръжност. Ако $AD = DC = a$, $\angle BAD = \alpha$, да се намери радиусът на тази окръжност.

✪ ✪

Отговори:

1. Г; ***2.*** А; ***3.*** Г; ***4.*** Б; ***5.*** В; ***6.*** А; ***7.*** В; ***8.*** Г; ***9.*** Б; ***10.*** Г;
11. $\frac{4}{3}$; ***12.*** $3\,cm$; $8.5\,cm$; ***13.*** $m = -15, \alpha = 135^\circ$;
14. $y_{\text{наим}} = y(0) = -2$, $y_{\text{найг}} = y(2) = \frac{4}{3}$; ***15.*** $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

ТЕМА 36

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. *Избираеми отговори*

1. Стойността на израза

$$\sqrt{12\frac{1}{4}}\left(\frac{5^{-2}}{0.5\cdot 2^{-1}}\right)^{-0.5} \quad \text{е:}$$

А) 1; Б) 6; В) 0; Г) 2.

2. Ако за ъглите α и β на триъгълник е изпълнено равенството

$$\sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta,$$

то третият ъгъл γ на триъгълника е равен на:

А) $60°$; Б) $90°$; В) $30°$; Г) $120°$.

3. Ако за числата x_1 и x_2 е изпълнено $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1x_2 = -2$, то x_1 и x_2 са корените на уравнението:

А) $x^2 - x + 2 = 0$;
Б) $x^2 + x - 2 = 0$;
В) $x^2 + x + 2 = 0$;
Г) $x^2 - 2x - 1 = 0$.

4. Най-големият корен на уравнението

$$(x^2 - 36)\sqrt{5 - x} = 0$$

е равен на:

А) -5; Б) -6; В) 5; Г) 6.

5. Редицата $\{a_n\}$ е геометрична прогресия с частно $q = -2$. Стойността на израза $\dfrac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2}$ е:

А) 12; Б) 8; В) 4; Г) $\frac{1}{8}$.

6. В спортно състезание участват 10 спортисти. Всеки спортист може да получи само една награда. Броят на възможностите за разпределение на първа, втора и трета награда между спортистите е равен на:

А) 120 Б) 720; В) 10!; Г) 10^3.

7. Ако (x, y) е решение на системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{array}\right. ,$$

то $(x + y)^2$ е равно на

А) 5; Б) -5; В) 25; Г) 0.

8. Уравнението $x^2 + (a+2)x - a + 1 = 0$ няма реални корени за всяко a, принадлежащо на интервала:

А) $(-\infty, -8)$;
Б) $[-8, 0]$;
В) $(-8, 0)$
Г) $[0, +\infty)$.

9. Корен на уравнението

$$5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$$

е числото

А) 0; Б) 2; В) -2; Г) 1.

10. Ако $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, то стойността на израза

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$$

е:

А) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$; Б) $-\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$;
В) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{4}$; Г) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се намери най-малкото цяло положително число, за което е изпълнено неравенството

$$\frac{|x-3|-1}{x^2+x+1} \leq 0.$$

12. В партида има 6 изделия първо качество и 10 изделия от второ качество. По колко начина могат случайно да се вземат три изделия, така че едното да е първо качество и две да са второ качество?

13. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 24\,cm$ и $CD = 8\,cm$. Да се намери стойността на тангенса на $\angle DAC$, ако височината на трапеца е $CE = 6\,cm$.

14. Намерете сумата от най-малката и най-голямата стойности на функцията $f(x) = 19 - 2x - x^2$ в затворения интервал $x \in [-2, 1]$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Допирната точка на вписаната в правоъгълния триъгълник ABC окръжност ($\angle ACB = 90^o$) с хипотенузата, я дели на отсечки с дължини $15\,cm$ и $10\,cm$. Да се намерят дължините на страните на $\triangle ABC$ и лицето на триъгълника, чийто върхове са допирните точки на окръжността със страните на дадения триъгълник.

⋆ ⋆

Отговори:

1. А; ***2.*** Г; ***3.*** Б; ***4.*** В; ***5.*** В; ***6.*** Б; ***7.*** В; ***8.*** В; ***9.*** Б; ***10.*** Г;
11. 2; ***12.*** 270; ***13.*** 12/41;
14. 36; ***15.*** $AB = 25\,cm$, $BC = 15\,cm$, $AC = 20\,cm$, $S = 30\,cm^2$.

ТЕМА 37

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се пресметне израза

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{6}$$

А) $A = 3$;
Б) $A = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{6}$;
В) $A = -3$;
Г) $A = 9$.

2. Решението на уравнението

$$\log_2(x+1) + \log_2(3x-1) = 2$$

е:

А) $x = 1$ и $x = -\frac{5}{3}$;
Б) $x = 1$;
В) $x = \frac{1}{2}$;
Г) $x = -1$.

3. Да се реши уравнението

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

А) $x_1 = 1, x_2 = 4$
Б) $x_1 = 2, x_2 = 0$;
В) $x = 2$;
Г) няма решение.

4. Да се реши неравенството

$$(x^2 + 2x - 1)(3x^2 - x + 1) \leq 0.$$

А) $\left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)$;
Б) $[0, \sqrt{2}-1]$;
В) $\left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2}, +\infty\right)$;
Г) $\left[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right]$

5. Корени на уравнението

$$\sqrt{100 - x^2} = x - 2$$

са:

А) 8 Б) -6 и 8; В) 10; Г) 2.

6. Функцията $f(x) = x^4 - 3|x| + 3$ е:

А) линейна;
Б) квадратна;
В) четна;
Г) нечетна.

7. Стойността на производната на функцията $f(x) = \sqrt{x + x^2}$ при $x = 1$ е равна на:

А) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ Г) 1.

8. Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^2-5x+6}$$

А) $-\dfrac{5}{6}$; Б) $-\dfrac{2}{5}$;

В) 0; Г) $\dfrac{3}{2}$.

9. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ъгълът при основата е α. Ако височината към основата е с $5\,cm$ по-голяма от радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то дължината на този радиус в cm е:

А) $5\cos\alpha$; Б) $5\sin\alpha$;

В) $5\operatorname{tg}\alpha$; Г) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

10. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с $\angle ACB = 90^\circ$ и ъглополовяща $CL = 2\sqrt{2}\,cm$. Ако $BC = 2a\,cm$, то дължината на катета AC е:

А) $\dfrac{2a}{a-2}\,cm$; Б) $\dfrac{2a}{a-\sqrt{2}}\,cm$;

В) $2a\,cm$; Г) $\dfrac{2a}{a-1}\,cm$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се реши неравенството

$$3\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} \geq 0.2$$

12. Да се намерят корените на тригонометричното уравнение

$$5\sin x + \cos 2x = 3,$$

които принадлежат на затворения интервал $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

13. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

14. В правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB е вписана полуокръжност, която се допира до катетите му, а центърът и лежи върху хипотенузата AB и я разделя на части с дължина $4\frac{2}{7}\,cm$ и $5\frac{5}{7}\,cm$. Да се намери лицето на $\triangle ABC$.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. За триъгълник ABC са дадени страната $AC = 13$, ъгълът $ABC = 60^o$ и лицето $S = 30\sqrt{3}$. Да се пресметнат:

а) дължините на страните AB и BC;

б) радиусите на вписаната и описаната окръжности;

в) разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжности.

✸ ✸

Отговори:

1. А; ***2.*** Б; ***3.*** Б; ***4.*** Г; ***5.*** А; ***6.*** В; ***7.*** А; ***8.*** Г; ***9.*** А; ***10.*** Г;
11. $x \geq 0$; ***12.*** $x = \frac{5\pi}{6}$; ***13.*** $\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;
14. $24\,cm^2$; ***15.*** а). $(23, 8), (8, 23)$; б). $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $\frac{13\sqrt{3}}{3}$; в). $\sqrt{13}$.

ТЕМА 38

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се реши неравенството

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{2-3x}{4}\right)\geq 1.25x$$

и да се провери дали числото

$$n=-2^4\left|\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right|$$

е решение на това неравенство?

А) $x\leq\frac{1}{4}$; $n=-\frac{2}{3}\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$

Б) $x\leq\frac{1}{7}$; $n=\frac{2}{3}\notin\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]$;

В) $x\leq\frac{1}{7}$; $n=-\frac{2}{3}\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]$;

Г) $x\geq\frac{1}{4}$; $n=-\frac{2}{3}\notin\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

2. Да се пресметне израза

$$A=\frac{3(m^2-3m+2)}{m^2-5m+6}\quad\text{за}\quad m=2.5$$

А) -0.9; Б) 9; В) $\frac{3}{5}$; Г) -9.

3. За кои стойности на x, стойностите на функцията

$$f(x)=\frac{2x-5}{x-1}$$

са по-малки или равни от съответните стойности на функцията

$$f_1(x)=\frac{5x-3}{3x-5}\ ?$$

А) $(-\infty,1)\cup\left[\frac{17-\sqrt{201}}{2},\frac{5}{3}\right)\cup\left[\frac{17+\sqrt{201}}{2},\infty\right)$

Б) $(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},\infty\right)$;

В) $\left(1,\frac{17-\sqrt{201}}{2}\right]\cup\left(\frac{5}{3},\frac{17+\sqrt{201}}{2}\right]$;

Г) $\left(-\infty,\frac{17-\sqrt{201}}{2}\right]\cup\left[1,\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{17+\sqrt{201}}{2},\infty\right)$.

4. Да се пресметне стойността на израза

$$A=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$$

ако $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

А) $\frac{4}{3}$; Б) $-\frac{4}{3}$; В) $\frac{3}{4}$; Г) $-\frac{3}{4}$.

5. Да се реши уравнението

$$2^{\sqrt{2x+1}}=8^{\sqrt{x-3}}$$

А) $-\frac{1}{2}$; Б) -4;
В) 3; Г) 4.

6. Да се реши уравнението

$$\lg(x^2-8x+4)=2\lg(x-6)$$

А) $4\pm 2\sqrt{3}$; Б) $\frac{9\pm\sqrt{41}}{2}$;

В) 8; Г) 6.

7. Да се реши уравнението

$$6\cos^2 x+5\sin x-2=0$$

А) $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathcal{Z}$;

Б) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathcal{Z}$;

В) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi; k\in\mathcal{Z}$;

Г) $\frac{\pi}{3}+2k\pi; \frac{2\pi}{3}+2k\pi; k\in\mathcal{Z}$.

8. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l}4^{x+y}=1024\\ 2^{5x-2y}=16\end{array}\right.$$

А) $(1,4)$; Б) $(4,1)$;

В) $(2,3)$; Г) $(3,2)$.

9. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+3x-10}$$

А) 0; Б) $\frac{4}{7}$;

В) $\frac{12}{7}$; Г) 2.

10. Медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник дели правия ъгъл в отношение $2:1$. Намерете най-малкия ъгъл на триъгълника.

А) $60°$; Б) $30°$;

В) $45°$; Г) $15°$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2+px+12=0$ са такива, че $x_1-x_2=1$. Определете коефициента p.

12. Около окръжност с радиус $2\,cm$ е описан равнобедрен трапец с лице $20\,cm^2$. Намерете страните на трапеца.

13. Дадени са две концентрични окръжности. Хорда в голямата окръжност, която се допира до малката окръжност е $12\,cm$. Да се намери лицето на венеца.

14. Даден е равнобедрен триъгълник с ъгъл α при основата и полупериметър p. Намерете дължината на основата на триъгълника.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. За геометрична прогресия с положителни членове е известно, че $a_1=4-x$, $a_2=2x$, $a_3=5x-2$. Да се намери десетия член a_{10} на геометричната прогресия.

⁂ ⁂ ⁂

Отговори:

1. А; ***2.*** Г; ***3.*** А; ***4.*** Б; ***5.*** Г; ***6.*** В; ***7.*** А; ***8.*** В; ***9.*** В; ***10.*** Б;

11. ± 7; ***12.*** $8\,cm$; $5\,cm$; $2\,cm$; $5\,cm$; ***13.*** $36\pi\,cm^2$;

14. $a=\dfrac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{p\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; ***15.*** 1024 или $\frac{1}{73728}$.

ТЕМА 39

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се реши уравнението

$$\frac{3x}{3x+2} = \frac{x-2}{x-1}$$

А) $x = -4$;
Б) $x = 4$;
В) $x = 0$;
Г) $x = 2$.

2. Да се реши уравнението

$$x - \sqrt{x+7} = 5$$

А) $x = 9$;
Б) $x = 9$ и $x = 2$;
В) $x = 5$;
Г) $x = -7$.

3. Да се реши неравенството

$$x + 2 + \frac{4}{x-3} \leq 0$$

А) $(-1, 2)$;
Б) $x = -1$ и $x = 2$;
В) $x \in [-1, 2) \cup [3, +\infty)$;
Г) $x \in (-\infty, -1] \cup [2, 3)$.

4. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3xy - 4y = 2 \\ x + xy + 3y = 1 \end{array}\right.$$

А) $(0, -1/2)$;
Б) $(1, 0)$ и $(-2, 3)$;
В) $(0, 1/3)$;
Г) $(1, 0)$.

5. Да се реши показателното уравнение

$$2^{x+1} - 2^x = 2$$

А) 2;
Б) 0;
В) 1;
Г) няма решение.

6. Да се реши логаритмичното уравнение

$$\lg(x^2 - 8x + 4) = 2\lg(x - 6).$$

А) 8;
Б) 8 и 2;
В) 6;
Г) няма решение.

7. Да се опрости изразът

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

А) 0;
Б) 2;
В) $\pi/2$;
Г) не може да се опрости.

8. Да се намери границата

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2+8x+15}{x^2+4x-5}$$

А) 1;
Б) $\frac{1}{3}$;
В) $-\frac{1}{3}$;
Г) -3.

9. Да се намери първия член a_1 и разликата d на аритметична прогресия, за която:

$$\left| \begin{array}{l} a_2+a_5-a_3=10, \\ a_1+a_6=17. \end{array} \right.$$

А) $a_1=3$, $d=1$;
Б) $a_1=1$, $d=3$;
В) $a_1=-\frac{1}{2}$, $d=\frac{7}{2}$;
Г) $a_1=-11$, $d=\frac{1}{3}$.

10. Върху основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е взета точка D, така че $\angle BDC=60^\circ$, $AD=3\,cm$, $BD=8\,cm$. Да се намери страната AC.

А) $AC=700\,mm$;
Б) $AC=70\,mm$;
В) $AC=0.7\,m$;
Г) $AC=0.7\,cm$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията

$$y=x^3-3x^2+3$$

при $x\in[-1,1]$.

12. Основите на равнобедрен трапец са $40\,cm$ и $28\,cm$, а бедрото му е $12\,cm$. Да се намерят ъглите на трапеца.

13. В окръжност с радиус R е вписан правоъгълник, ъгълът между диагоналите на който е α. Да се намери периметърът P на правоъгълника.

14. В успоредник $ABCD$ са дадени страните $AB=14$, $AD=12$ и диагоналът $AC=16$. Намерете дължината на височината CH към страната AB.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Диагоналите AC и BD на равнобедрен трапец с основа AB се пресичат в точка O под прав ъгъл и $AO=8$, $DO=6$. През точка O е прекарана права MN ($M\in AD, N\in BC$), която е перпендикулярна на BC. Намерете дължината на отсечката MN.

☆ ☆

Отговори:

1. А; ***2.*** А; ***3.*** Г; ***4.*** Б; ***5.*** В; ***6.*** А; ***7.*** Б; ***8.*** Б; ***9.*** Б; ***10.*** Б;
11. $y_{нмс}=y(-1)=-1$, $y_{нгс}=y(0)=3$; ***12.*** 60°, 120°;
13. $P=4R\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$; ***14.*** $CH=3\sqrt{15}$; ***15.*** $49/5$.

ТЕМА 40

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се реши уравнението:

$$5 - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{x^2+5}{x^2-1}$$

А) $x_1 = 2, x_2 = -\frac{7}{3}$;
Б) няма решение;
В) $x_1 = 0, x_2 = -1$;
Г) всяко x.

2. Решете неравенството:

$$\left(3x^2 - 10x + 3\right)\left(x^2 + 2\right) \geq 0.$$

А) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)$;

Б) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;

В) $x \in (-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$;
Г) $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. Да се намери за кои стойности на реалния параметър k уравнението

$$x^2 + 7x + 2k + 3 = 0$$

има корени с различни знаци.

А) $k < \frac{37}{8}$; Б) $k < -\frac{3}{2}$;

В) $k < \frac{61}{8}$; Г) $k \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{37}{8}\right)$.

4. Най-голямата стойност на функцията

$$y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

за $x \in [-1, 1]$ е:

А) $y(3) = -1$; Б) $y(-1) = -\frac{19}{3}$;

В) $y(1) = \frac{1}{3}$; Г) $f(0) = -1$.

5. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = 5 \end{array}\right.$$

А) $(3, 4)$;
Б) $(0, -5), (3, 4), (-3, 4)$;
В) $(0, 5), (3, 4), (3, -4)$;
Г) $(3, -5), (-3, -4), (3, -4)$.

6. Решението на уравнението

$$4^{x+1/2} - 15 \cdot 2^x = 8 \text{ е:}$$

А) $\frac{15 \pm \sqrt{249}}{2}$; Б) 3;

В) $-\frac{1}{2}$ и 8; Г) 4.

7. Решението на неравенството

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3-2x}\right) \geq \log_5(4x+1) \text{ е:}$$

А) $(-\infty, 3]$; Б) $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$;

В) $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$; Г) $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

8. Да се реши тригонометричното уравнение

$$\cos 3x + \cos 5x = 0$$

А) $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{8}$;
Б) $x = \pm\frac{\pi}{16} + 2k\pi$;
В) $x = 0$;
Г) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

9. В равнобедрен трапец диагоналите са взаимно перпендикулярни, а височината на трапеца е $h = 3\sqrt{2}\,cm$. Да се намери лицето на трапеца.

А) $S = 3\sqrt{2}\,cm^2$;
Б) $S = 36\,cm^2$;
В) не може да се намери;
Г) $S = 18\,cm^2$

10. Две външно допиращи се окръжности имат радиуси $R = 25\,cm$ и $r = 16\,cm$. Да се намери дължината d на общата им външна допирателна.

А) $d = \sqrt{1762}\,cm$;
Б) $d = 40\,cm$;
В) $d = 41\,cm$;
Г) $d = 9\,cm$

Втора част. *Свободни отговори*

11. В равнобедрен трапец с остър ъгъл 30^o при основата е вписана окръжност с радиус $5\,cm$. Да се намери лицето на трапеца.

12. Тъждествено равни ли са

$$A = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} \text{ и } B = \operatorname{tg}(45^o + \alpha)?$$

13. В правоъгълен триъгълник ABC с катет $AC = 20$ е вписана полуокръжност с радиус 4, допираща се до катетите и имаща диаметър върху хипотенузата AB. Да се пресметне другият катет.

14. Да се намери сумата

$$3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Около окръжност с радиус r е описан трапец, с остри ъгли α и β при голямата основа.

а) Да се намери лицето на трапеца;

б) Да се пресметне лицето на трапеца при $r = 2\,cm$, $\alpha = 60^o$ и $\beta = 30^o$.

☆ ☆

Отговори:

1. А; ***2.*** А; ***3.*** Б; ***4.*** В; ***5.*** Б; ***6.*** Б; ***7.*** В; ***8.*** Г; ***9.*** Г; ***10.*** Б;

11. $S = 200\,cm^2$; ***12.*** да; ***13.*** 5; ***14.*** 4;

15. $S = \left(\frac{2r}{\sin\alpha} + \frac{2r}{\sin\beta}\right)\cdot r$, $\frac{16}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)\,cm^2$.

ТЕМА 41

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се реши уравнението

$$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{7x-1}{2(x+1)}$$

А) $x_1=3, x_2=\frac{1}{3}$; Б) $x=0$;
В) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{7}$; Г) $x=\pm 1$.

2. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x+5}=x-1.$$

А) $x_1=4, x_2=-1$;
Б) $x=4$;
В) $x=-1$;
Г) $x=3,\ x_2=-2$.

3. Да се реши системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} 2x^2-y=-1 \\ y+2x=5 \end{array}\right.$$

А) $(1,3),(-2,9)$; Б) $(3,1),(9,-2)$;
В) $(1,-2)$; Г) $(3,9)$.

4. Да се реши уравнението

$$2\cdot 4^x-15\cdot 2^x-8=0$$

А) 8 и $-\frac{1}{2}$; Б) $\frac{15\pm\sqrt{161}}{4}$;
В) $-\frac{8}{7}$; Г) 3.

5. Да се реши логаритмичното уравнение

$$\lg(3x^2-5x+8)=1$$

А) няма решение;
Б) $x=2$;
В) $x_1=2, x_2=-1/3$;
Г) $x=-1/3$.

6. Да се опрости изразът

$$\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2 x-1}.$$

А) 1; Б) $\operatorname{tg}^2 x$;
В) $1-\frac{1}{\sin^2 x}$; Г) $\frac{\sin x}{\cos x}$.

7. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{x^2-x-2}$$

А) $5/3$; Б) 5;
В) 0; Г) $+\infty$.

8. Да се намери производната на функцията

$$y = \frac{2x+1}{x+3}$$

при $x = 2$.

А) $y'(2) = \frac{1}{3}$; Б) $y'(2) = 2$;
В) $y'(2) = \frac{1}{5}$; Г) $y'(2) = 1$.

9. Катетите на правоъгълен триъгълник са $12\,cm$ и $16\,cm$. Да се намери медианата към хипотенузата.

А) $20\,cm$; Б) $10\,cm$;
В) $28\,cm$; Г) $14\,cm$.

10. Да се намери лицето на успоредник със страна $14\,cm$ и диагонали $26\,cm$ и $30\,cm$.

А) $S = 780\,cm^2$; Б) $S = 336\,cm^2$;
В) $S = 364\,cm^2$ Г) $S = 420\,cm^2$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се намерят първият член a_1 и разликата d на аритметична прогресия, за която

$$\left| \begin{array}{l} a_2 + a_8 = 10, \\ a_3 + a_{11} = 30. \end{array} \right.$$

12. Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 18.$$

13. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$, за който $AD = DC = 5$ и ъгъл $BAD = 60^o$. Намерете радиусът на окръжността, описана около трапеца.

14. Разстоянието между центровете на две пресичащи се окръжности с радиуси $17\,cm$ и $10\,cm$ е равно на $21\,cm$. Намерете разстоянията от центровете до точката, в която общата външна допирателна пресича правата, минаваща през центровете на окръжностите.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Равнобедрен трапец $ABCD$ с основи AB и CD $(AB > CD)$ е описан около окръжност.

а) да се докаже, че отношението от лицето на кръга и лицето на трапеца е равно на отношението на дължината на окръжността и периметъра на трапеца;

б) ако $AB = 16\,cm$ и $CD = 9\,cm$, а Q е пресечната точка на правите AD и BC, да се намерят периметърът и лицето на трапеца, както и лицето на триъгълника DCQ.

Отговори:

1. А; ***2.*** Б; ***3.*** А; ***4.*** Г; ***5.*** В; ***6.*** А; ***7.*** А; ***8.*** В; ***9.*** Б; ***10.*** Б;
11. $a_1 = -15$, $d = 5$; ***12.*** $y_{min}(3) = -9$, $y_{max}(-1) = 23$; ***13.*** 5;
14. $51\,cm$; ***15.*** $P_{tr} = 50\,cm$, $S_{tr} = 150\,cm^2$, $S_\triangle = \frac{486}{7}\,cm^2$.

ТЕМА 42

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Да се опрости изразът

$$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$$

А) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; Б) -1;
В) 0; Г) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

2. Решете неравенството

$$\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x-1}.$$

А) $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

Б) $x \in (-\infty, 0]$;

В) $x \in \emptyset$;

Г) $x \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Функцията

$$f(x) = a \cdot 5^{3x-1} + b$$

е такава, че $f(1/3) = 0$ и $f(1) = 48$. Да се пресметне $f(2/3)$.

А) 8; Б) 48;
В) 12; Г) -8.

4. Да се намери най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$$

за $x \in [-3, 2]$.

А) 25; Б) $\frac{283}{27}$;
В) $-\frac{8}{3}$; Г) 0.

5. Да се реши системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy = 9 \end{array} \right.$$

А) $(5, 4)$; Б) $(1, 4), (4, 1)$;
В) $(-7, 16)$; Г) $(5, 4), (4, 1)$.

6. Да се реши неравенството

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x \geq 0$$

А) $x \in [0, 2]$;

Б) $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$;

В) $x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$;

Г) $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$.

7. Да се реши уравнението

$$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$$

А) $3, \dfrac{1}{3}$; Б) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$;
В) $2, -2$; Г) $3, -3$.

8. Да се реши тригонометричното уравнение

$$\sin 2x + \sin 10x = 0.$$

А) $\dfrac{k\pi}{6}; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathcal{Z}$;

Б) $(2k+1)\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathcal{Z}$;

В) $\pm\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathcal{Z}$;

Г) $2k\pi, k \in \mathcal{Z}$.

9. Да се пресметне границата

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^3 - 4x^2 - 32x}{x^2 - 64}$$

А) 1; Б) 8;

В) $\frac{1}{2}$; Г) 6.

10. Да се определи острият ъгъл на ромб, ако лицето му е 16, а лицето на вписания в него кръг е 2π.

А) $90°$; Б) $60°$;
В) $30°$; Г) $45°$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Ако

$$A = \sqrt[5]{\frac{3x^3}{2y^2}}\,, \quad B = \sqrt[3]{\frac{y}{2x}},$$

да се пресметне произведението $A \cdot B$, за $x = 4$, $y = 27$.

12. В равнобедрен трапец с остър ъгъл $45°$ при основата, е вписана окръжност с радиус 3. Да се намери лицето на трапеца.

13. В правоъгълен триъгълник ABC са дадени катетите $AC = 15$, $BC = 20$ и CH е височината към хипотенузата AB. Окръжността с диаметър BH пресича BC в точка K. Намерете дължината на отсечката HK.

14. Ортогоналните проекции на две съседни страни на успоредник върху големия му диагонал са 8 и 16, а малкият му диагонал е 22. Да се намерят страните на успоредника.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Лицето на триъгълника $\triangle ABC$ е 84, а най-малката му страна е $AC = 13$. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е $R = \frac{65}{8}$.

а). Да се покаже, че $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

б). Да се намерят дължините на другите две страни на триъгълника.

Отговори:

1. А; ***2.*** Г; ***3.*** А; ***4.*** А; ***5.*** Б; ***6.*** Б; ***7.*** Б; ***8.*** А; ***9.*** Г; ***10.*** В;
11. 1; ***12.*** $36\sqrt{2}$ ед.^{2}; ***13.*** 9.6 ед.; ***14.*** 19, 13; ***15.*** 14, 15.

ТЕМА 43

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. ***Избираеми отговори***

1. Изчислете

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

А) 1; Б) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

В) $a-b$; Г) $\frac{1}{a-b}$.

2. Да се реши уравнението

$$\frac{16x^4-1}{16x^2-4}=4x+2.5$$

А) $\frac{9}{2}$; Б) $\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}$;

В) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; Г) $\pm\frac{1}{4}$.

3. Да се реши уравнението

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

А) -1, 2; Б) -2, 2, -1;

В) -2, 2; Г) -1.

4. Да се реши уравнението

$$7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$$

А) $\frac{5}{3}$; Б) $\frac{3}{5}$; В) 1; Г) -1.

5. Да се реши уравнението

$$\log_{4x}2\cdot\log_{\frac{x}{4}}2=\log_{\frac{x}{16}}2\,.$$

А) 1, 2; Б) 0;

В) 0, 1; Г) $\frac{1}{4}$, 4, 16.

6. Да се реши тригонометричното уравнение

$$2\sin^2 x+2\sin x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}.$$

А) -1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$; $k\in\mathcal{Z}$;

В) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathcal{Z}$;

Г) $\pm\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathcal{Z}$.

7. Да се реши неравенството

$$\sqrt{x^2-9}<x\ .$$

А) $x\in[3,\infty)$;

Б) $x\in[-\infty,\infty)$;

В) $x\in\emptyset$;

Г) $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$.

8. Да се реши неравенството

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_2(x^2-x)} \geq 0.2$$

А) $-1,\ 2$;
Б) $[-1,2]$;
В) $[-1,0)\cup(1,2]$;
Г) $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$.

9. Да се реши неравенството

$$f'(x)-f(x)\geq 0, \quad \text{ако} \quad f(x)=\frac{3}{5-x}.$$

А) $[4,+\infty)$; Б) $[4,5)\cup(5,+\infty)$;
В) $[4,5]$; Г) $(5,+\infty)$.

10. В $\triangle ABC$ са зададени страните $AB=2\sqrt{2}\,cm$, $BC=\sqrt{5}\,cm$ и $\angle CAB=45^o$. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако е известно още, че височината, спусната от върха C към страната AB е по-малка от $\sqrt{2}\,cm$.

А) $1\,cm^2$; Б) $2\,cm^2$;
В) $1\,cm^2$ или $3\,cm^2$; Г) $3\,cm^2$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\cdot\lg 3. \end{array}\right.$$

12. Сумата от кубовете на корените на уравнението

$$4x^2-8x+c=0$$

е равна на 3.5. Намерете коефициента c.

13. Дадена е функцията

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-1}.$$

Да се намерят всички реални стойности на параметъра a, за които уравнението $f(x)=a$ има два различни реални корена.

14. В трапец са дадени основите $8\,cm$ и $12\,cm$. Един от острите му ъгли е равен на 30^o. Продълженията на бедрата му сключват прав ъгъл. Намерете височината на трапеца.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Намерете най-малката стойност на функцията

$$y(x)=ax^2+4x+c$$

в интервала $x\in[2,3]$, ако $y(4)=-25$, $y(-2)=-13$.

Отговори:

1. А; ***2.*** А; ***3.*** А; ***4.*** Г; ***5.*** А; ***6.*** Б; ***7.*** А; ***8.*** В; ***9.*** Б; ***10.*** А;
11. $(1,2)$, $(16,-28)$; ***12.*** 3; ***13.*** $a\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$;
14. $\sqrt{3}$; ***15.*** $y_{\text{нмс}}(3)=-8$.

ТЕМА 44

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. *Избираеми отговори*

1. Изчислете

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}\ , \text{ ако } \quad x=\frac{4}{5}m\ .$$

А) $\frac{4}{5}$; Б) $\frac{5}{4}$;

В) -1; Г) 2.

2. Знаменателят на несъкратима дроб е с 2 по-голям от числителя. Ако се намали с 3 числителят на дробта, обратна на дадената и от получената дроб се извади дадената дроб, ще се получи $\frac{1}{15}$. Намерете дадената дроб.

А) $\frac{3}{5}$ или $\frac{10}{12}$; Б) $\frac{3}{5}$;

В) $\frac{5}{6}$; Г) $\frac{5}{3}$.

3. Да се реши уравнението

$$\sqrt{5x+10}+x+2=0$$

А) $3,\ -2$; Б) 3;

В) -2; Г) няма решение.

4. Да се реши уравнението

$$0.2^{(\log_{\frac{1}{5}}2)-2x}-5^{x+3\cdot\log_5 2}=10.$$

А) $5,\ -1$; Б) 1;

В) 5; Г) -1.

5. Да се реши тригонометричното уравнение

$$\sin 2x\cdot\sin 6x=\cos x\cdot\cos 3x.$$

А) $\pm\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},\ \pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};\ k\in\mathcal{Z}$;

Б) $\pm\frac{\pi}{10}+2k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in\mathcal{Z}$;

В) $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathcal{Z}$;

Г) $\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi; k\in\mathcal{Z}$.

6. Да се реши неравенството

$$x+7\leq\frac{28-31x}{x^2-5x+4}\cdot$$

А) $x\in(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup(1,4)$;
Б) $x\in[-2,1]\cup[4,+\infty)$;
В) $x\in[-2,1)\cup(4,+\infty)$;
Г) $x\in(-\infty,-2]\cup[1,4]$.

7. Да се реши неравенството

$$2^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)}\geq 0.5\ .$$

А) $x \in [-1, 3]$;
Б) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$;
В) $x \in [-1, 0) \cup (2, 3]$;
Г) $x \in (0, 2)$.

8. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{1}{2}} 9^{-1} + x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3^{5x-7}} > 0\ .$$

А) $x \in \left(-\frac{3}{5}, 2\right)$;
Б) $x \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (2, +\infty)$;
В) $x \in (\log_2 3, +\infty)$;
Г) $x \in \left[\frac{7}{5}, 2\right)$.

9. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{array} \right.$$

А) $-10; 2$;
Б) $(1, 4); (4, 1)$;
В) $(4, 1)$;
Г) $10; -2$.

10. Разликата между квадратите на корените на уравнението

$$3x^2 - 5x + p = 0$$

е равна на $\frac{5}{9}$. Намерете коефициента p.

А) 2; Б) 3;
В) 1; Г) $\frac{2}{3}$.

Втора част. ***Свободни отговори***

11. Да се реши уравнението

$$2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0.$$

12. Намерете височината на равнобедрен триъгълник, бедрото на който е равно на 5, а косинуса на ъгъла между двете бедра е равен на $\left(-\frac{7}{25}\right)$

13. В равнобедрен трапец, основите на който са $2\,cm$ и $8\,cm$, е вписан кръг. Да се намери радиуса на този кръг.

14. Острият ъгъл на ромб е равен на α, а големият му диагонал е 16. Намерете лицето на ромба, ако $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$.

Трета част. ***Задача с пълно решение***

15. Намерете най-малката стойност на функцията

$$y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

в интервала $x \in [-2, 2]$.

* *

Отговори:

1. Г; ***2.*** Б; ***3.*** В; ***4.*** Б; ***5.*** А; ***6.*** А; ***7.*** В; ***8.*** А; ***9.*** В; ***10.*** А;
11. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathcal{Z}$; ***12.*** 3; ***13.*** $2\,cm$;
14. 96; ***15.*** $y_{\text{наим}}(-2) = -24$.

ТЕМА 45

Тема за самостоятелна подготовка

Първа част. *Избираеми отговори*

1. Сборът на две числа е 135. Кои са числата, ако 35% от първото число е равно на 28% от второто число.

А) 60, 75;   Б) 35, 100;

В) 45, 90;   Г) −35, 170.

2. Да се реши уравнението

$$\frac{8}{x^2-9} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{2}{x-3}.$$

А) ±3;   Б) 7

В) 5;   Г) 1.

3. Да се реши уравнението

$$2\log_3(x-3) - \log_3(8-x) = 1.$$

А) 5;   Б) 15;

В) $\dfrac{3+\sqrt{69}}{2}$;   Г) $\dfrac{3\pm\sqrt{69}}{2}$.

4. Да се реши показателното уравнение

$$2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} - 4 = 0.$$

А) 2;   Б) $\dfrac{1}{3}$;

В) 1;   Г) $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, 1.

5. Да се реши неравенството

$$4^{1-x} > 2^{3x^2-3}.$$

А) $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$;

Б) $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$;

В) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;

Г) $-\frac{5}{3}$; 1.

6. Да се намери границата

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3}\ .$$

А) 6;   Б) 1;

В) −8;   Г) $+\infty$.

7. Да се намерят решенията на уравнението

$$\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$$

в интервала $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

А) $\dfrac{2\pi}{3}$; Б) $-\dfrac{\pi}{3}$;
В) $\dfrac{4\pi}{3}$; Г) $\dfrac{\pi}{3}$.

8. Решете уравнението

$$\frac{1}{3x} + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{3}{2}$$

при $\mid x \mid < 1$.

А) $\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{3}$; Б) $\dfrac{2}{5}$;
В) $\dfrac{1}{3}$; Г) 0.

9. Да се намери лицето на трапец с диагонали $d_1 = 10$, $d_2 = 24$ и средна основа $m = 13$.

А) 240 ед^2; Б) 60 ед^2;
В) 120 ед^2; Г) 221 ед^2.

10. Върху основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е взета точка D така, че ъгъл BDC е 60°, $AD = 3\,cm$, $BD = 8\,cm$. Да се намери страната AC.

А) $7\,cm$; Б) $5\,cm$;
В) $\dfrac{11}{2}\,cm$; Г) $4\,cm$.

Втора част. *Свободни отговори*

11. Даден е правоъгълният триъгълник ABC, в който височината CD към хипотенузата има дължина $12\,cm$, а радиусът на вписаната в триъгълника окръжност има дължина $5\,cm$. Да се намерят страните на триъгълника.

12. Да се реши тригонометричното уравнение

$$2\sin^2 x - 4 = -5\cos x.$$

13. В окръжност с радиус R е вписан правоъгълник, ъгълът между диагоналите на който е α. Да се намери периметърът на правоъгълника.

14. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $c = 4\,cm$ и остър ъгъл $\alpha = 15^\circ$. Да се намери радиусът r на полукръга, който е вписан в триъгълника и центърът му O лежи върху хипотенузата AB. Да се намери лицето на този полукръг.

Трета част. *Задача с пълно решение*

15. Диагоналите на успоредник са с дължини 9 и 7. Периметърът му е 22. Да се намерят страните на успоредника.

✳ ✳

Отговори:

1. А; ***2.*** Г; ***3.*** В; ***4.*** А; ***5.*** Б; ***6.*** А; ***7.*** В; ***8.*** А; ***9.*** В; ***10.*** А;
11. $a = 20$, $b = 15$, $c = 25$; ***12.*** $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$; ***13.*** $P = 4R\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$;
14. $S = \frac{\pi}{3}\,cm^2; r = \frac{\sqrt{6}}{3}\,cm$; ***15.*** $(4, 7)$ или $(7, 4)$.

Стефка Караколева

Решени теми от кандидатстудентските

изпити по МАТЕМАТИКА

за Русенски Университет «Ангел Кънчев»

2000 – 2011

Първо издание
Формат: 70/100/16
Печатни коли: 29
Издателски коли: 14.5
Тираж: 100

Печатна база при Русенски Университет „Ангел Кънчев“

Русе, 2011